



**You have downloaded a document from  
RE-BUS  
repository of the University of Silesia in Katowice**

**Title:** Obrona odcinka

**Author:** Beata Kraska

**Citation style:** Kraska Beata. (2013). Obrona odcinka. Praca doktorska.  
Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.



UNIwersytet ŚLĄSKI  
W KATOWICACH



Biblioteka  
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki  
i Szkolnictwa Wyższego

Rozprawa doktorska  
Instytut Matematyki  
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach  
Katowice, luty 2013

*Beata Kraska*

# Obrona odcinka

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem

Prof. dr hab. Witolda Rzymowskiego

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>1. Płaskie zbiory wypukłe</b>	<b>4</b>
1.1. Działania Minkowskiego. Szerokość zbioru . . . . .	4
1.2. Rzut na zbiór wypukły. Stożki prostopadłe . . . . .	6
1.3. Parametryzacja brzegu płaskiego zbioru wypukłego . . . . .	8
1.4. Pogoń stożka za kierunkiem . . . . .	15
<b>2. Funkcje wklęsłe i wypukłe</b>	<b>19</b>
2.1. Operacje na funkcjach . . . . .	19
2.2. Wariacja i długość krzywej . . . . .	39
<b>3. Układy obronne</b>	<b>44</b>
3.1. Pary wypukłe przystosowane do obrony odcinków . . . . .	44
3.2. Układy obronne . . . . .	50
<b>4. Problem obrony odcinka</b>	<b>62</b>
4.1. Trajektorie dopuszczalne. Sterowania . . . . .	62
4.2. Funkcje nieantycypujące. Strategie . . . . .	63
4.3. Problem obrony odcinka . . . . .	64
<b>5. Obrona</b>	<b>66</b>
5.1. Pomocnicza strategia pościgu . . . . .	66
5.2. Strategia czuwania . . . . .	68
<b>6. Atak</b>	<b>72</b>
6.1. Jazda wzdłuż ruchomego odcinka . . . . .	72
6.2. Maksymalne rozciągnięcie . . . . .	76
6.3. Strategia nękania . . . . .	82
<b>7. Obrona odcinka. Zakończenie</b>	<b>93</b>
7.1. Zbiory przydatne do obrony odcinków . . . . .	93
7.2. Obrona odcinka . . . . .	98
<b>Literatura</b>	<b>103</b>

# Wstęp

Pod koniec dwudziestego wieku wzrosło zainteresowanie matematycznymi problemami związanymi z ochroną, lub wręcz z militarną obroną, wyróżnionych rejonów. Rozważane są problemy statyczne, które w języku potocznym można sprowadzić do pytania o minimalną liczbę kamer potrzebnych do obserwacji całego danego obszaru o skomplikowanym kształcie i problemy dynamiczne, w których chodzi (na przykład) o nieustanną obserwację intruza przy pomocy przemieszczającej się o własnych siłach, ruchomej kamery. Wymienionym wyżej zagadnieniom poświęcone są, między innymi, prace [16], [1], [8], [13]. Podobne problemy, będące często fragmentem bardziej złożonego problemu obrony obszaru, były już rozważane w pierwszej monografii z teorii gier różniczkowych, patrz [7], przykład 1.9.2, s 19, przykłady 9.6.3 i 9.6.4, s 266 i w pracy [14].

Obrona odcinka pojawia się zwykle w zagadnieniach obrony obszaru jako problem częściowy lub pomocniczy, patrz cytowany wyżej przykład 9.6.4. Poza tym odcinek jest broniony przed atakiem z pewnego kierunku. W tej pracy zajmujemy się wyłącznie zagadnieniem obrony odcinka położonego na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Zakładamy przy tym przewagę prędkości po stronie napastnika. Dając napastnikowi możliwość krążenia wokół bronionego odcinka zmieniamy istotnie charakter rozważanej gry, a w konsekwencji również sposób jej rozwiązania. W przypadku rozważanej w pracy gry obrony odcinka, w której gracze poruszają się tak zwanym ruchem prostym, rozwiązanie gry otrzymujemy konstruując stosowną parę zbiorów wypukłych. Niejako przy okazji otrzymujemy też jawny wzór wyznaczający maksymalną długość możliwego do obrony odcinka. Ponieważ w pracach [10] i [18] użyto z powodzeniem podobnych metod, to można zaryzykować przypuszczenie, że rozwiązanie każdego (analogicznego) problemu obrony obszaru o pewnych ekstremalnych własnościach będzie wyznaczone przez odpowiednią parę zbiorów wypukłych.

Pracę można podzielić na trzy części. Część pierwszą stanowią rozdziały pierwszy, drugi i trzeci. W części pierwszej podajemy potrzebne dalej własności zbiorów i funkcji wypukłych (wklęsłych) oraz wybrane elementy teorii miary i całki. Niektórych własności dowodzimy, chociaż wydają się znane lub oczywiste. Powodem takiego postępowania są trudności ze wskazaniem stosownej bibliografii. Wprowadzamy również kilka podstawowych konstrukcji używanych w następnych rozdziałach. Głównym celem konstrukcji jest przybliżenie wspomnianej wyżej pary zbiorów wypukłych odpowiednią parą wielokątów wypukłych. W końcowej części rozdziału trzeciego zajmujemy się kluczowym dla tej pracy pojęciem układu obronnego.

Główną część pracy stanowią rozdziały czwarty, piąty i szósty. W rozdziale czwartym opisujemy rozważaną w pracy grę obrony odcinka. Definiujemy tam zbiory trajektorii i strategii dopuszczalnych oraz cenę gry. Celem rozdziałów piątego i szóstego jest wyznaczenie ceny gry. W rozdziale piątym, korzystając z odpowiednich własności układów obronnych, otrzymujemy dolne oszacowanie ceny gry. Na początku rozdziału szóstego dowodzimy lematu umożliwiającego w dalszej części rozdziału ustalenie wzajemnych relacji pomiędzy prędkościami kątowymi wektorów  $y(t)$  oraz  $y(t) - x(t)$ , gdzie  $y(t)$ ,  $x(t)$  są położeniami napastnika i obrońcy w chwili  $t \geq 0$ . W wyniku otrzymujemy górne oszacowanie ceny gry, pokrywające się z oszacowaniem dolnym.

Uzyskany w rozdziałach piątym i szóstym wynik dotyczy obrony odcinka położone-

go na osi odciętych, symetrycznie względem osi rzędnych. W ostatnim, siódmym rozdziale, korzystając z faktu, że przesunięcie i obrót są izometriami, przenosimy ten wynik standardowym sposobem na przypadek dowolnie położonego odcinka.

# 1. Płaskie zbiory wypukłe

## 1.1. Działania Minkowskiego. Szerokość zbioru

### Oznaczenia

Jeżeli  $f : X \rightarrow Y$  jest dowolną funkcją i  $A \subset X$ , to symbolem  $f|_A$  oznaczmy obcięcie funkcji  $f$  do zbioru  $A$ , czyli

$$f|_A(x) = f(x), \quad x \in A.$$

Dla dowolnych  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiujemy

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ Lx &= (-x_2, x_1), \quad Rx = (x_2, -x_1), \quad \omega(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \\ \mathcal{O}_\alpha x &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha \end{bmatrix}, \\ x \wedge y &= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\begin{aligned} Lx &= \mathcal{O}_{\frac{\pi}{2}} x = -\mathcal{O}_{-\frac{\pi}{2}} x = -Rx, \\ \omega'(\alpha) &= (-\sin \alpha, \cos \alpha) = L\omega(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \langle w(\alpha), w(\beta) \rangle &= \cos(\alpha - \beta), \\ w(\alpha) \wedge w(\beta) &= \sin(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

oraz

$$x \wedge y = \langle Lx, y \rangle = \langle x, Ry \rangle.$$

Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $r \geq 0$  definiujemy dalej

$$\begin{aligned} [a, b] &= \left\{ c \in \mathbb{R}^2 : \bigvee_{\lambda \in [0, 1]} c = a + \lambda(b - a) \right\} = \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}, \\ (a, b) &= [a, b] \setminus \{a, b\}, \quad [a, b) = [a, b] \setminus \{b\}, \quad (a, b] = [a, b] \setminus \{a\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B[a, r] &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}, \quad B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\}, \\ S^1[a, r] &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| = r\}, \quad S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\begin{aligned} [a, a] &= B[a, 0] = \{a\}, \\ (a, a) &= [a, a) = (a, a] = B(a, 0) = \emptyset. \end{aligned}$$

Jeżeli zbiór  $Z \subset \mathbb{R}^m$  zawiera co najmniej dwa elementy, to dla każdej funkcji  $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$  przyjmujemy (patrz [4], definicja **3.1.1**, s **79-80**) oznaczenie:

$$\text{Lip } F = \sup_{x, y \in Z, x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|},$$

gdzie symbol  $\|\cdot\|$  oznacza normę euklidesową. Powiemy, że  $F$  jest funkcją lipschitzowską (w zbiorze  $Z$ ), gdy

$$\text{Lip } F < \infty.$$

Dla każdego  $Z \subset \mathbb{R}^m$  symbole  $\bar{Z}$ ,  $\text{int } Z$ ,  $\text{bd } Z$  będą oznaczać odpowiednio: domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru  $Z$ .

Otoczką wypukłą niepustego zbioru  $Z \subset \mathbb{R}^2$  nazwiemy najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór wypukły zawierający zbiór  $Z$ . Otoczkę wypukłą niepustego zbioru  $Z$  oznaczmy przez

$$\text{conv } Z.$$

### Działania Minkowskiego

Dla dowolnych niepustych zbiorów  $A, B \subset \mathbb{R}^m$  i dowolnego  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiujemy

$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Jeżeli jeden ze zbiorów  $A$  lub  $B$  zawiera tylko jeden element, powiedzmy  $A = \{a\}$ , to piszemy

$$a \pm B$$

zamiast

$$\{a\} \pm B.$$

Niepusty i wypukły zbiór  $Z \subset \mathbb{R}^2$  nazwiemy stożkiem wypukłym, gdy spełnia warunek

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda Z \subset Z.$$

### Szerokość zbioru

**Definicja 1.1.** Dla niepustego i zwartego zbioru  $Z \subset \mathbb{R}^2$  i dla każdego  $q \in S^1$  definiujemy

$$\chi_Z(q) = \max_{z \in Z} \langle q, z \rangle, \quad Z(q) = \{\zeta \in Z : \langle q, \zeta \rangle = \chi_Z(q)\}.$$

Zbiór  $Z(q)$  nazwiemy strefą podparcia wektorem  $q$ , a liczbę

$$\mathbb{k}_Z(\pm q) = \chi_Z(q) + \chi_Z(-q)$$

nazwiemy szerokością zbioru  $Z$  w kierunku  $\pm q$ .

Oczywiście, jeżeli  $a \in \mathbb{R}^2$  i  $r \geq 0$ , to dla każdego  $q \in S^1$  mamy

$$\begin{aligned} \chi_{B[a,r]}(q) &= \langle a, q \rangle + r, \quad (B[a,r])(q) = \{a + rq\}, \\ \mathbb{k}_{B[a,r]}(\pm q) &= 2r. \end{aligned}$$

Natomiast, jeżeli  $a \in \mathbb{R}^2$  i  $a \neq b$ , to dla

$$q = \frac{b - a}{\|b - a\|}$$

mamy

$$\mathbb{k}_{[a,b]}(\pm q) = \|b - a\| \quad \text{oraz} \quad \mathbb{k}_{[a,b]}(\pm Lq) = 0.$$

## 1.2. Rzut na zbiór wypukły. Stożki prostopadłe

### Rzut punktu na zbiór

**Definicja 1.2.** Niech  $Z \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem niepustym i niech  $x \in \mathbb{R}^2$ . Powiemy, że  $\hat{x} \in Z$  jest rzutem punktu  $x$  na zbiór  $Z$ , jeżeli

$$\|x - \hat{x}\| = \min_{z \in Z} \|x - z\|,$$

a dla każdego  $z \in Z \setminus \{\hat{x}\}$  ma miejsce nierówność

$$\|x - z\| > \|x - \hat{x}\|.$$

Rzut punktu  $x$  na zbiór  $Z$  będziemy oznaczać symbolem  $P_Z(x)$ .

### Własności rzutu na domknięty zbiór wypukły

Niech  $Z \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym. Wtedy (patrz [20], twierdzenie 1, s 189 i twierdzenie 2, s 190):

1. dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  istnieje  $P_Z(x)$ ;
2. jeżeli  $\hat{x} \in Z$ , to  $\hat{x} = P_Z(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle x - \hat{x}, z - \hat{x} \rangle \leq 0, \quad z \in Z;$$

3. dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\|P_Z(x) - P_Z(y)\| \leq \|x - y\|.$$

**Przykład 1.1.** Jeżeli  $a \in \mathbb{R}^2$  i  $r > 0$ , to (patrz [20], przykład 1, s 190) dla każdego  $x \notin B(a, r)$  mamy

$$P_{B[a,r]}(x) = a + \frac{r}{\|x - a\|} (x - a).$$

**Lemat 1.1.** Załóżmy, że  $r > 0$  i dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  spełniającego warunek

$$\|x\| \geq 2r$$

zdefiniujemy

$$P_r(x) = P_{B[0,r]}(x) = \frac{r}{\|x\|} x.$$

Przy tych założeniach ma miejsce nierówność

$$\text{Lip } P_r \leq \frac{1}{2}.$$

**Dowód.** Dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, r)$  mamy

$$\begin{aligned} \|P_r(y) - P_r(x)\|^2 &= \left\| \frac{r}{\|y\|} y - \frac{r}{\|x\|} x \right\|^2 = \frac{r^2}{\|y\|^2 \|x\|^2} \|\|x\| y - \|y\| x\|^2 \\ &= \frac{r^2}{\|y\|^2 \|x\|^2} (2\|y\|^2 \|x\|^2 - 2\|y\| \|x\| \langle y, x \rangle) \end{aligned}$$



oraz

$$2\langle y, x \rangle = \|y\|^2 + \|x\|^2 - \|y - x\|^2,$$

więc

$$\begin{aligned} \|P_r(y) - P_r(x)\|^2 &= \frac{r^2}{\|y\|^2 \|x\|^2} \left( 2\|y\|^2 \|x\|^2 - \|y\| \|x\| (\|y\|^2 + \|x\|^2 - \|y - x\|^2) \right) \\ &= \frac{r^2}{\|y\| \|x\|} \left( 2\|y\| \|x\| - (\|y\|^2 + \|x\|^2 - \|y - x\|^2) \right) \\ &= \frac{r^2}{\|y\| \|x\|} (\|y - x\|^2 - (\|y\| - \|x\|)^2) \\ &\leq \frac{r^2}{\|y\| \|x\|} \|y - x\|^2 \leq \frac{r^2}{4r^2} \|y - x\|^2 = \frac{1}{4} \|y - x\|^2. \end{aligned}$$

### Stożki prostopadłe

Symbolem  $2^X$  oznaczmy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ . Niech  $Z \subset \mathbb{R}^m$  będzie zbiorem niepustym i domkniętym. Multifunkcję  $F : Z \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  nazwiemy górnio półciągłą, jeżeli

$$\{(x, y) \in Z \times \mathbb{R}^n : y \in F(x)\}$$

jest zbiorem domkniętym.

**Definicja 1.3.** Niech  $Z \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym. Dla każdego  $z \in Z$  zbiór

$$\mathbf{N}_Z(z) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 : \bigwedge_{\zeta \in Z} \langle \zeta - z, q \rangle \leq 0 \right\}$$

nazwiemy stożkiem prostopadłym do zbioru  $Z$  w punkcie  $z$ .

Łatwo sprawdzić, że dla każdego  $z \in Z$  zbiór  $\mathbf{N}_Z(z)$  jest domkniętym stożkiem wypukłym, a multifunkcja

$$Z \ni z \mapsto \mathbf{N}_Z(z)$$

jest górnio półciągłą.

**Przykład 1.2.** Niech  $r \approx 1,798\,682$  będzie rozwiązaniem równania

$$2r \arcsin \frac{\pi}{2r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx.$$

Zdefiniujmy

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{r^2 - \frac{\pi^2}{4}} - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} Z &= \left\{ (x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : g(x) \leq y \leq f(x) \right\}, \\ z_0 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Mamy

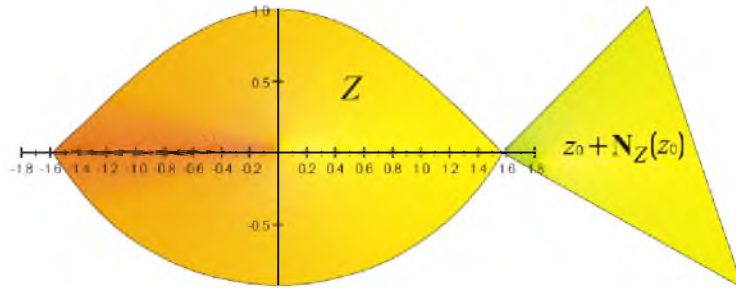
$$z_0 \in \text{bd } Z, \\ g' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{r^2 - \frac{\pi^2}{4}}} \approx 1,792\,586, \quad f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = -1.$$

Przyjmując

$$q^- \stackrel{\text{def}}{=} R \begin{bmatrix} 1 \\ g' \left( \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g' \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,792\,586 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ q^+ \stackrel{\text{def}}{=} L \begin{bmatrix} 1 \\ f' \left( \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

otrzymamy

$$\mathbf{N}_Z(z_0) = \{ \mu q^- + \nu q^+ : \mu, \nu \geq 0 \} \\ \approx \left\{ (q_1, q_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} : -\frac{q_1}{1,792\,586} \leq q_2 \leq q_1 \right\}.$$



**Rys. 1.1.** Zbiór  $Z$  i suma  $z_0 + \mathbf{N}_Z(z_0)$ .

### 1.3. Parametryzacja brzegu płaskiego zbioru wypukłego

W tej części rozdziału wykorzystamy §3 rozdziału **II** książki [9].

#### Funkcjonał Minkowskiego

Zakładamy, że  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem zwartym, wypukłym i spełnia warunek

$$0 \in \text{int } D.$$

Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  definiujemy

$$\mathbf{M}_D(x) = \{ \mu \geq 0 : x \in \mu D \} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{m}_D(x) = \min \mathbf{M}_D(x).$$

## Własności

1. Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  zbiór  $\mathbf{M}_D(x)$  jest niepusty i domknięty.

2. Funkcjonał  $\mathbf{m}_D$  jest dodatnio jednorodny i subaddytywny. To znaczy dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $\lambda \geq 0$  mamy

$$\mathbf{m}_D(\lambda x) = \lambda \mathbf{m}_D(x) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{m}_D(x + y) \leq \mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y).$$

3. Funkcjonał  $\mathbf{m}_D$  jest wypukły i lipschitzowski.

4. Jeżeli  $C \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem zwartym, wypukłym i spełnia warunki:

$$0 \in \text{int } C, \quad C \subset D,$$

to  $\mathbf{m}_D \leq \mathbf{m}_C$ .

5. Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mamy

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x)}x \in \text{bd } D,$$

a poza tym

$$\text{bd } D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{m}_D(x) = 1\}.$$

6. Dla każdego  $r > 0$  i każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  mamy

$$\mathbf{m}_{B[0,r]}(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

**Dowód własności 1.** Obierzmy dowolnie  $x \in \mathbb{R}^2$ . Ponieważ  $0 \in \text{int } D$ , to istnieje takie  $r > 0$ , że

$$B[0, r] \subset D.$$

Istnieje też takie  $\lambda > 0$ , że  $\lambda \|x\| \leq r$ . Mamy

$$\|x\| \leq \frac{r}{\lambda},$$

więc

$$x \in B\left[0, \frac{r}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}B[0, r] \subset \frac{1}{\lambda}D,$$

co dowodzi relacji

$$\frac{1}{\lambda} \in M_D(x).$$

Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  mamy zatem

$$\mathbf{M}_D(x) \neq \emptyset.$$

Obierzmy ponownie dowolne  $x \in \mathbb{R}^2$ . Niech  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$  będzie ciągiem elementów zbioru  $\mathbf{M}_D(x)$  zbieżnym do pewnej liczby  $\mu$ . Oczywiście  $\mu \geq 0$  i dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  istnieje takie  $d_k \in D$ , że

$$x = \mu_k d_k.$$

Zbiór  $D$  jest zwarty, więc istnieje podciąg  $\{d_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  ciągu  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  zbieżny do pewnego  $d \in D$ . Skoro

$$\mu \geq 0, \quad x = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{k_j} d_{k_j} = \mu d \in \mu D,$$

to

$$\mu \in \mathbf{M}_D(x).$$

**Dowód własności 2.** (Patrz [9], rozdział II, §3, s 79-82). Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  (patrz własność 1)

$$\mathbf{M}_D(x) \subset [0, \infty)$$

jest zbiorem niepustym i domkniętym, więc

$$\inf \mathbf{M}_D(x) = \min \mathbf{M}_D(x),$$

co dowodzi poprawności definicji funkcjonału  $\mathbf{m}_D$ .

Obierzmy dowolnie  $\lambda \geq 0$  oraz  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Jeżeli  $\lambda = 0$ , to

$$\lambda x = 0 \in \lambda D,$$

więc

$$0 = \mathbf{m}_D(\lambda x) = \lambda \mathbf{m}_D(x).$$

Jeżeli  $\lambda > 0$ , to

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_D(\lambda x) &= \{\nu \geq 0 : \lambda x \in \nu D\} = \left\{\nu \geq 0 : x \in \frac{\nu}{\lambda} D\right\} \\ &= \lambda \{\mu \geq 0 : x \in \mu D\} = \lambda \mathbf{M}_D(x), \end{aligned}$$

więc

$$\mathbf{m}_D(\lambda x) = \min \lambda \mathbf{M}_D(x) = \lambda \min \mathbf{M}_D(x) = \lambda \mathbf{m}_D(x).$$

Dowodzi to dodatniej jednorodności funkcjonału  $\mathbf{m}_D$ . Jeżeli

$$\mathbf{m}_D(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{m}_D(y) = 0,$$

to

$$x \in \mathbf{m}_D(x) D = \{0\} \quad \text{lub} \quad y \in \mathbf{m}_D(y) D = \{0\},$$

więc

$$\mathbf{m}_D(x + y) = \mathbf{m}_D(y) = \mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)$$

lub

$$\mathbf{m}_D(x + y) = \mathbf{m}_D(x) = \mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y).$$

Niech zatem będzie

$$\mathbf{m}_D(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{m}_D(y) > 0.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x)} x \in D \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\mathbf{m}_D(y)} y \in D,$$

a  $D$  jest zbiorem wypukłym, to

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)} (x + y) \\ &= \frac{\mathbf{m}_D(x)}{\mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)} \left( \frac{1}{\mathbf{m}_D(x)} x \right) + \frac{\mathbf{m}_D(y)}{\mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)} \left( \frac{1}{\mathbf{m}_D(y)} y \right) \in D. \end{aligned}$$

Stąd, wobec dodatniej jednorodności funkcjonału  $\mathbf{m}_D$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)} \mathbf{m}_D(x+y) = \mathbf{m}_D\left(\frac{1}{\mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y)}(x+y)\right) \leq 1.$$

Zatem

$$\mathbf{m}_D(x+y) \leq \mathbf{m}_D(x) + \mathbf{m}_D(y).$$

**Dowód własności 3.** Dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $\lambda \in [0, 1]$  mamy (patrz własność 2)

$$\mathbf{m}_D((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \mathbf{m}_D((1-\lambda)x) + \mathbf{m}_D(\lambda y) = (1-\lambda)\mathbf{m}_D(x) + \lambda\mathbf{m}_D(y),$$

więc  $\mathbf{m}_D$  jest funkcjonałem wypukłym. Wobec tego (patrz [20], twierdzenie 6, s 212) istnieje taka stała  $K \geq 0$ , że

$$|\mathbf{m}_D(x) - \mathbf{m}_D(y)| \leq K \|x - y\|, \quad x, y \in B[0, 1].$$

Jeżeli

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|x\|, \|y\|\} > 1,$$

to

$$\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y \in B[0, 1],$$

więc

$$|\mathbf{m}_D(x) - \mathbf{m}_D(y)| = \lambda \left| \mathbf{m}_D\left(\frac{1}{\lambda}x\right) - \mathbf{m}_D\left(\frac{1}{\lambda}y\right) \right| \leq \lambda K \left\| \frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}y \right\| = K \|x - y\|$$

i w rezultacie

$$\text{Lip } \mathbf{m}_D = \text{Lip } (\mathbf{m}_D)|_{B[0,1]} \leq K < \infty.$$

**Uwaga 1.1.** W wypowiedzi cytowanego wyżej twierdzenia 6 brakuje założenia zwartości zbioru  $\overline{G}$  (zawartego w wypukłej i otwartej dziedzinie  $W \subset \mathbb{R}^n$  rozważanego tam funkcjonału wypukłego  $J$ ). Natomiast w dowodzie nierówności

$$\text{Lip } J|_{\text{conv } \overline{G}} < \infty$$

zwartość zbioru  $\overline{G}$  została wykorzystana.

**Dowód własności 4.** Niech  $C \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem zwartym, wypukłym, spełniającym warunki:

$$0 \in \text{int } C, \quad C \subset D.$$

Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  mamy

$$\mathbf{M}_C(x) = \{\mu \geq 0 : x \in \mu C\} \subset \{\mu \geq 0 : x \in \mu D\} = \mathbf{M}_D(x),$$

więc

$$\mathbf{m}_D(x) = \min \mathbf{M}_D(x) \leq \min \mathbf{M}_C(x) = \mathbf{m}_C(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

**Dowód własności 5.** Ustalmy dowolne  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Ponieważ

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x)}x \in D,$$

$$0 < \nu < \mathbf{m}_D(x) \Rightarrow \frac{1}{\nu}x \notin D$$

oraz

$$\lim_{\nu \uparrow \mathbf{m}_D(x)} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\mathbf{m}_D(x)},$$

to

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x)}x \in \text{bd } D.$$

Wynika stąd natychmiast inkluzja

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{m}_D(x) = 1\} \subset \text{bd } D.$$

Jeżeli  $x \in \text{bd } D$ , to  $x \in D = 1D$ , więc  $\mathbf{m}_D(x) \leq 1$ . Wiemy już, że

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(x)}x \in \text{bd } D.$$

Nie może być zatem  $\mathbf{m}_D(x) < 1$ , bo byłoby wówczas (patrz [20], twierdzenie 3, s 155)

$$x = (1 - \mathbf{m}_D(x))0 + \mathbf{m}_D(x) \left( \frac{1}{\mathbf{m}_D(x)}x \right) \notin \text{bd } D.$$

**Dowód własności 6.** Dla każdego  $r > 0$  i każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{B[0,r]}(x) &= \{\mu \geq 0 : x \in \mu B[0,r]\} = \{\mu \geq 0 : x \in B[0,\mu r]\} \\ &= \{\mu \geq 0 : \|x\| \leq \mu r\} = \left[ \frac{\|x\|}{r}, \infty \right), \end{aligned}$$

więc

$$\mathbf{m}_{B[0,r]}(x) = \frac{\|x\|}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

### Parametryzacja brzegu płaskiego zbioru wypukłego

**Definicja 1.4.** Niech  $D \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem zwartym, wypukłym i spełniającym warunek

$$0 \in \text{int } D.$$

Dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiujemy

$$\zeta_D(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} \omega(\alpha).$$

Funkcję  $\zeta_D : \mathbb{R} \rightarrow \text{bd } D$  nazwiemy parametryzacją brzegu zbioru  $D$ .

**Lemat 1.2.** Niech  $D \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem zwartym, wypukłym i spełniającym warunek

$$0 \in \text{int } D.$$

(a) Dla każdego  $\alpha_* \in \mathbb{R}$  funkcja  $\zeta_D : [\alpha_*, \alpha_* + 2\pi) \rightarrow \text{bd } D$  jest różnowartościowa, a poza tym

$$\zeta_D([\alpha_*, \alpha_* + 2\pi)) = \text{bd } D.$$

(b) Istnieje takie  $\varkappa \geq 1$ , że

$$\text{Lip } \zeta_D \leq \varkappa^2 (\varkappa + \text{Lip } \mathbf{m}_D),$$

a dla każdego  $v \geq 1$  i dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  prawdziwa jest implikacja

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{2\pi}{v} \Rightarrow \|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\| \geq \left( \frac{v}{\varkappa\pi} \sin \frac{\pi}{v} \right) |\alpha - \beta|.$$

**Dowód punktu (a).** Dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  mamy

$$\mathbf{m}_D(\zeta_D(\alpha)) = \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) = 1,$$

więc z własności **5** wynika, że

$$\zeta_D(\mathbb{R}) \subset \text{bd } D.$$

Ustalmy dowolnie  $\alpha_* \in \mathbb{R}$ . Różnowartościowość funkcji

$$\zeta_D : [\alpha_*, \alpha_* + 2\pi) \rightarrow \text{bd } D$$

jest oczywista. Obierzmy dowolnie  $z \in \text{bd } D$ . Skoro  $z \neq 0$ , to istnieje dokładnie jedno takie  $\alpha \in [\alpha_*, \alpha_* + 2\pi)$ , że

$$\frac{z}{\|z\|} = \omega(\alpha).$$

Korzystając ponownie z własności **5**, otrzymujemy

$$\zeta_D(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{m}_D\left(\frac{z}{\|z\|}\right)} \frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\mathbf{m}_D(z)} z = z,$$

więc

$$\text{bd } D \subset \zeta_D([\alpha_*, \alpha_* + 2\pi)).$$

Kończy to dowód punktu (a).

**Dowód punktu (b).** Ponieważ  $0 \in \text{int } D$ , a  $D$  jest zbiorem ograniczonym, to istnieje takie  $\varkappa \geq 1$ , że

$$B\left[0, \frac{1}{\varkappa}\right] \subset D \subset B[0, \varkappa].$$

Korzystając z własności **4** i **6**, dla każdego  $x \in \mathbb{R}^2$  otrzymujemy

$$\frac{\|x\|}{\varkappa} \leq \mathbf{m}_D(x) \leq \varkappa \|x\|.$$

Dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  będzie zatem

$$\frac{1}{\varkappa} \leq \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) \leq \varkappa \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\varkappa} \leq \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} \leq \varkappa.$$

W takim razie, dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\| &= \left\| \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} \omega(\alpha) - \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\beta))} \omega(\beta) \right\| \\ &= \frac{\|\mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \omega(\alpha) - \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) \omega(\beta)\|}{\|\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))\| \|\mathbf{m}_D(\omega(\beta))\|} \\ &\leq \varkappa^2 \|\mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \omega(\alpha) - \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) \omega(\beta)\|. \end{aligned}$$

Natomiast

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{m}_D(\omega(\beta))\omega(\alpha) - \mathbf{m}_D(\omega(\alpha))\omega(\beta) \| \\
&= \| \mathbf{m}_D(\omega(\beta))(\omega(\alpha) - \omega(\beta)) - (\mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) - \mathbf{m}_D(\omega(\beta)))\omega(\beta) \| \\
&\leq \| \mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \| \|\omega(\alpha) - \omega(\beta)\| + \| \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) - \mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \| \|\omega(\beta)\| \\
&\leq \| \mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \| |\alpha - \beta| + \| \mathbf{m}_D(\omega(\alpha)) - \mathbf{m}_D(\omega(\beta)) \| \\
&\leq \varkappa |\alpha - \beta| + (\text{Lip } \mathbf{m}_D) |\alpha - \beta|.
\end{aligned}$$

W rezultacie, dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\| \leq \varkappa^2 (\varkappa + \text{Lip } \mathbf{m}_D) |\alpha - \beta|,$$

czyli

$$\text{Lip } \zeta_D \leq \varkappa^2 (\varkappa + \text{Lip } \mathbf{m}_D).$$

Weźmy teraz dowolne  $v \geq 1$ , dowolne  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  spełniające warunek

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{2\pi}{v}$$

i przyjmijmy

$$\frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} = \mu, \quad \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\beta))} = \nu.$$

Ponieważ

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\alpha))} \geq \frac{1}{\varkappa} \quad \text{oraz} \quad \nu = \frac{1}{\mathbf{m}_D(\omega(\beta))} \geq \frac{1}{\varkappa},$$

to

$$\begin{aligned}
\|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\|^2 &= \|\mu\omega(\alpha) - \nu\omega(\beta)\|^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu \cos(\alpha - \beta) \\
&= (\mu - \nu)^2 + 2\mu\nu(1 - \cos(\alpha - \beta)) \geq \frac{2}{\varkappa^2}(1 - \cos(\alpha - \beta)) \\
&= \frac{4}{\varkappa^2} \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}
\end{aligned}$$

i w rezultacie

$$\|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\| \geq \frac{2}{\varkappa} \sin \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

Przyjmijmy

$$\gamma = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

i zauważmy, że

$$\gamma = \left(1 - \frac{v}{\pi}\gamma\right) 0 + \left(\frac{v}{\pi}\gamma\right) \frac{\pi}{v} \quad \text{oraz} \quad 0 \leq \frac{v}{\pi}\gamma \leq 1.$$

W przedziale  $\left[0, \frac{\pi}{v}\right]$  funkcja sinus jest wklęsła, więc

$$\begin{aligned}
\sin \frac{|\alpha - \beta|}{2} &= \sin \gamma \geq \left(1 - \frac{v}{\pi}\gamma\right) \sin 0 + \left(\frac{v}{\pi}\gamma\right) \sin \frac{\pi}{v} \\
&= \frac{v}{\pi}\gamma \sin \frac{\pi}{v} = \left(\frac{v}{2\pi} \sin \frac{\pi}{v}\right) |\alpha - \beta|.
\end{aligned}$$



Zatem

$$\|\zeta_D(\alpha) - \zeta_D(\beta)\| \geq \frac{2}{\varkappa} \sin \frac{|\alpha - \beta|}{2} \geq \left( \frac{v}{\varkappa\pi} \sin \frac{\pi}{v} \right) |\alpha - \beta|.$$

#### 1.4. Pogoń stożka za kierunkiem

W rozdziale szóstym będziemy potrzebować pewnej własności multifunkcji

$$\text{bd } D \ni z \mapsto \mathbf{N}_D(z),$$

będącej odpowiednikiem własności Darboux funkcji ciągłej. Korzystając z wprowadzonej parametryzacji brzegu płaskiego i zwartego zbioru wypukłego opiszemy najpierw stożki prostopadłe w każdym punkcie tego brzegu.

##### Parametryzacja stożka prostopadłego

Założmy, że  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zwartym zbiorem wypukłym spełniającym warunek

$$0 \in \text{int } D.$$

Dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiujemy

$$\begin{aligned} \Gamma_D(\alpha) &= [\alpha - \pi, \alpha + \pi] \cap \omega^{-1}(\mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha))), \\ \gamma_D^-(\alpha) &= \min \Gamma_D(\alpha), \quad \gamma_D^+(\alpha) = \max \Gamma_D(\alpha). \end{aligned}$$

##### Własności

1.  $\Gamma_D \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  jest funkcją górną półciągłą.
2.  $\alpha - \frac{\pi}{2} + \delta < \gamma_D^-(\alpha) \leq \gamma_D^+(\alpha) < \alpha + \frac{\pi}{2} - \delta$ , gdzie

$$\delta = \min_{\beta \in \mathbb{R}} \arctg \frac{r}{\|\zeta_D(\beta)\|}, \quad r = \max \{\rho \geq 0 : B[0, \rho] \subset D\}.$$

3.  $\Gamma_D(\alpha) = [\gamma_D^-(\alpha), \gamma_D^+(\alpha)]$ .
4. Jeżeli  $k \in \mathbb{Z}$  i  $\beta \in 2k\pi + \Gamma_D(\alpha)$ , to  $\omega(\beta) \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha))$ .

**Dowód własności 1.** Założmy, że  $\gamma_k \in \Gamma_D(\alpha_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \quad \text{oraz} \quad \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k.$$

Dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  mamy

$$\alpha_k - \pi \leq \gamma_k \leq \alpha_k + \pi \quad \text{oraz} \quad \omega(\gamma_k) \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha_k)).$$

Zatem

$$\alpha - \pi \leq \gamma \leq \alpha + \pi,$$

a z uwagi na górną półciągłość multifunkcji

$$\mathbf{N}_D : \text{bd } D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$$

i ciągłość funkcji  $\omega$ , również

$$\omega(\gamma) \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha)).$$

W rezultacie  $\gamma \in \Gamma_D(\alpha)$ , co kończy dowód własności **1**.

**Dowód własności 2.** Obierzmy dowolne  $\gamma \in \Gamma_D(\alpha)$  i przyjmijmy  $q = \omega(\gamma)$ . Ponieważ  $q \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha))$  i mamy

$$rR\omega(\alpha) \in B[0, r] \subset D \quad \text{oraz} \quad rL\omega(\alpha) \in B[0, r] \subset D,$$

to

$$\langle q, rR\omega(\alpha) - \zeta_D(\alpha) \rangle \leq 0 \quad \text{oraz} \quad \langle q, rL\omega(\alpha) - \zeta_D(\alpha) \rangle \leq 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\langle q, \zeta_D(\alpha) \rangle \geq r \langle q, R\omega(\alpha) \rangle \quad \text{oraz} \quad \langle q, \zeta_D(\alpha) \rangle \geq r \langle q, L\omega(\alpha) \rangle.$$

Musi być zatem

$$\langle q, \zeta_D(\alpha) \rangle \geq 0,$$

bo

$$2 \langle q, \zeta_D(\alpha) \rangle \geq r \langle q, R\omega(\alpha) \rangle + r \langle q, L\omega(\alpha) \rangle = r \langle q, R\omega(\alpha) + L\omega(\alpha) \rangle = r \langle q, 0 \rangle = 0.$$

Wobec powyższego, skoro  $\gamma \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi]$  i

$$0 \leq \langle q, \zeta_D(\alpha) \rangle = \|\zeta_D(\alpha)\| \langle \omega(\gamma), \omega(\alpha) \rangle = \|\zeta_D(\alpha)\| \cos(\gamma - \alpha),$$

to

$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma - \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Przyjmijmy teraz

$$\varphi = \arctg \frac{r}{\|\zeta_D(\alpha)\|}$$

i zauważmy, że

$$0 < \delta \leq \varphi \leq \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{r}{\|\zeta_D(\alpha)\|} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

W takim razie, skoro

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle q, \zeta_D(\alpha) - rR\omega(\alpha) \rangle = \|\zeta_D(\alpha)\| \left( \left\langle q, \frac{\zeta_D(\alpha)}{\|\zeta_D(\alpha)\|} \right\rangle - \frac{r}{\|\zeta_D(\alpha)\|} \langle q, R\omega(\alpha) \rangle \right) \\ &= \|\zeta_D(\alpha)\| \left( \cos(\gamma - \alpha) - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos\left(\gamma - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\|\zeta_D(\alpha)\|}{\cos \varphi} (\cos \varphi \cos(\gamma - \alpha) + \sin \varphi \sin(\gamma - \alpha)) = \frac{\|\zeta_D(\alpha)\|}{\cos \varphi} \cos(\gamma - \alpha - \varphi), \end{aligned}$$

to

$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma - \alpha - \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Podobnym sposobem, korzystając z nierówności

$$0 \leq \langle q, \zeta_D(\alpha) - rL\omega(\alpha) \rangle,$$

otrzymamy warunek

$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma - \alpha + \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\alpha - \frac{\pi}{2} + \delta \leq \alpha - \frac{\pi}{2} + \varphi \leq \gamma \leq \alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \alpha + \frac{\pi}{2} - \delta,$$

co kończy dowód własności **2**.

**Dowód własności 3.** Dowodu wymaga tylko przypadek, w którym  $\gamma_D^-(\alpha) < \gamma_D^+(\alpha)$ . Obierzmy dowolnie  $\gamma \in [\gamma_D^-(\alpha), \gamma_D^+(\alpha)]$  i przyjmijmy

$$\gamma^- = \gamma_D^-(\alpha) \quad \text{oraz} \quad \gamma^+ = \gamma_D^+(\alpha).$$

Ponieważ (patrz własność **2**)

$$\begin{aligned} \omega(\gamma^-) \wedge \omega(\gamma) &= \sin(\gamma - \gamma^-) \geq 0, \quad \omega(\gamma) \wedge \omega(\gamma^+) = \sin(\gamma^+ - \gamma) \geq 0, \\ \omega(\gamma^-) \wedge \omega(\gamma^+) &= \sin(\gamma^+ - \gamma^-) > 0, \end{aligned}$$

to

$$\omega(\gamma) = \frac{\omega(\gamma) \wedge \omega(\gamma^+)}{\omega(\gamma^-) \wedge \omega(\gamma^+)} \omega(\gamma^-) + \frac{\omega(\gamma^-) \wedge \omega(\gamma)}{\omega(\gamma^-) \wedge \omega(\gamma^+)} \omega(\gamma^+) \in \mathbf{N}_D(\alpha).$$

Zatem  $\gamma \in \Gamma_D(\alpha)$ , a wobec dowolności  $\gamma \in [\gamma_D^-(\alpha), \gamma_D^+(\alpha)]$ ,

$$\Gamma_D(\alpha) = [\gamma_D^-(\alpha), \gamma_D^+(\alpha)].$$

**Dowód własności 4.** Jeżeli  $k \in \mathbb{Z}$  i  $\beta \in 2k\pi + \Gamma_D(\alpha)$ , to istnieje takie  $\gamma \in \Gamma_D(\alpha)$ , że

$$\beta = 2k\pi + \gamma.$$

Zatem

$$\omega(\beta) = \omega(\gamma) \in \omega(\Gamma_D(\alpha)) \subset \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha)).$$

### Pogoń

Lemat, którego teraz dowiedzimy, będzie użyty w rozdziale szóstym w dowodzie stosownej własności strategii ataku.

**Lemat 1.3.** Jeżeli  $\alpha, \beta : [t_*, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami ciągłymi i spełniają warunek

$$\sup_{t \geq t_*} \{\alpha(t) - \beta(t)\} = \infty,$$

to istnieje takie  $t^* \geq t_*$ , że

$$\omega(\beta(t^*)) \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha(t^*))).$$

**Dowód.** Ustalmy takie  $k \in \mathbb{Z}$ , że

$$\beta(t_*) > \gamma_D^+(\alpha(t_*)) + 2k\pi$$

i zdefiniujmy

$$t^* = \sup \left\{ t \geq t_* : \bigwedge_{s \in [t_*, t]} \beta(s) > \gamma_D^+(\alpha(s)) + 2k\pi \right\}.$$

Wobec przyjętego założenia o liczbie  $k \in \mathbb{Z}$  definicja wielkości  $t^*$  jest poprawna, a z przyjętego warunku na funkcje  $\alpha$  i  $\beta$  wynika nierówność  $t^* < \infty$ . Zauważmy, że jeżeli  $t_* \leq t'$  i ma miejsce nierówność

$$\beta(t') > \gamma_D^+(\alpha(t')) + 2k\pi,$$

to

$$\lim_{t \downarrow t'} \sup_{s \in (t', t]} \{ \gamma_D^+(\alpha(s)) + 2k\pi \} \leq \gamma_D^+(\alpha(t')) + 2k\pi < \beta(t') = \lim_{t \downarrow t'} \inf_{s \in (t', t]} \beta(s),$$

bo  $\Gamma_D$  jest multifunkcją górnice półciągłą, a  $\beta$  jest funkcją ciągłą. W takim wypadku istnieć będzie takie  $t'' > t'$ , że

$$\beta(t) > \gamma_D^+(\alpha(t)) + 2k\pi, \quad t \in [t', t''].$$

Stąd i z definicji liczby  $t^*$  wynika nierówność

$$\beta(t^*) \leq \gamma_D^+(\alpha(t^*)) + 2k\pi.$$

Mamy zatem  $t_* < t^*$  oraz

$$\begin{aligned} \gamma_D^+(\alpha(t^*)) + 2k\pi &\geq \beta(t^*) = \lim_{t \uparrow t^*} \sup_{s \in [t, t^*)} \beta(s) \geq \lim_{t \uparrow t^*} \sup_{s \in [t, t^*)} \{ \gamma_D^+(\alpha(s)) + 2k\pi \} \\ &\geq \lim_{t \uparrow t^*} \sup_{s \in [t, t^*)} \{ \gamma_D^-(\alpha(s)) + 2k\pi \} \geq \gamma_D^-(\alpha(t^*)) + 2k\pi, \end{aligned}$$

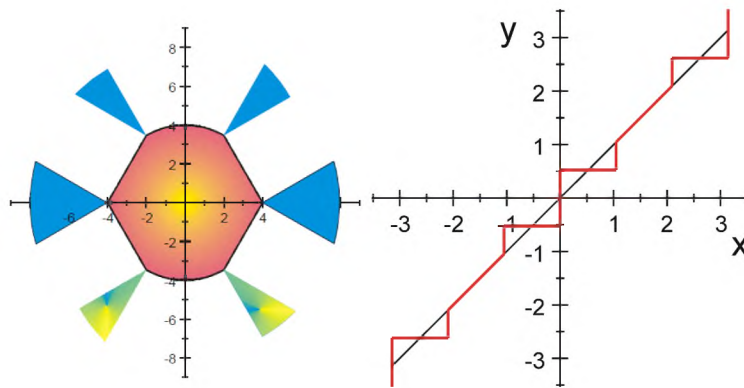
więc

$$\beta(t^*) \in 2k\pi + \Gamma_D(\alpha(t^*)).$$

Żądana relacja

$$\omega(t^*) \in \mathbf{N}_D(\zeta_D(\alpha(t^*)))$$

wynika teraz z własności 4.



**Rys. 1.2.** Zbiór

$D = \{(x, y) \in [-4, 4] \times \mathbb{R} : |y| \leq \max(0, \min(\sqrt{3}(4+x), \sqrt{3}(4-x)), \sqrt{16-x^2})\}$ , stożki postaci  $z + \mathbf{N}_D(z)$  i wykres multifunkcji  $\Gamma_D$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ .

## 2. Funkcje wklęsłe i wypukłe

### 2.1. Operacje na funkcjach

Liczby  $\rho, \sigma$  spełniające warunek

$$0 < \rho < \sigma$$

będą ustalone w całej pracy. Wyjątkiem od tej reguły będą tylko przykłady.

Celem uproszczenia niektórych definicji i rachunków wprowadzamy następujące konwencje. Jeżeli  $m, n \in \mathbb{Z}$  i  $m > n$ , to dla dowolnego ciągu liczb lub wektorów  $\{\mu_k\}$  przyjmujemy

$$\sum_{k=m}^n \mu_k \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Podobnie, jeżeli  $\{Z_k\}$  jest ciągiem zbiorów, a  $m, n \in \mathbb{Z}$  i  $m > n$ , to

$$\bigcup_{k=m}^n Z_k \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset.$$

W większości przypadków rozważać będziemy funkcje o wartościach w przestrzeni  $\mathbb{R}^m$ , gdzie  $m = 1$  lub  $m = 2$ . Oczywiście

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1 \quad \text{oraz} \quad |t| = \|t\|, \quad \text{gdy } t \in \mathbb{R}.$$

W tym i następnych rozdziałach wiele miejsca zajmą rozważania związane z funkcjami postaci  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\ell > 0$ . W wielu przypadkach  $f$  będzie przy tym funkcją wypukłą lub wklęsłą.

**Uwaga 2.1.** Jeżeli  $f : (-\ell, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją wypukłą lub wklęsłą, to (patrz np. [20], twierdzenie 6, s 212)  $f$  jest funkcją lipschitzowską w każdym przedziale  $[\tau', \tau''] \subset (-\ell, \ell)$ , gdzie  $\tau' < \tau''$ . Oczywiście stała Lipschitza

$$\text{Lip } f|_{[\tau', \tau'']} = \sup_{s, t \in [\tau', \tau''], s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} < \infty$$

może zależeć od przedziału  $[\tau', \tau'']$ .

#### Definicja 2.1

(a) Powiemy, że  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$  jest podziałem przedziału  $[-\ell, \ell]$ , jeżeli

$$-\ell = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \ell.$$

Zbiór wszystkich podziałów przedziału  $[-\ell, \ell]$  oznaczymy przez  $\Pi[\ell]$ .

(b) Dla każdego podziału  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  przyjmujemy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \delta_k(\pi) &= \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \delta_{\min}(\pi) &= \min_{k=0,1,\dots,n-1} \delta_k(\pi), \quad \delta_{\max}(\pi) = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \delta_k(\pi), \end{aligned}$$

a dla każdego  $\varkappa > 0$  przyjmujemy jeszcze

$$\varkappa\pi = \{\varkappa\tau_0, \varkappa\tau_1, \dots, \varkappa\tau_n\}.$$

(c) Jeżeli

$$\pi' = \{\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{n'}\} \in \Pi[\ell] \quad \text{oraz} \quad \pi'' = \{\tau''_0, \tau''_1, \dots, \tau''_{n''}\} \in \Pi[\ell],$$

to będziemy pisać  $\pi' \subset \pi''$  lub  $\pi'' \supset \pi'$ , gdy

$$\{\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{n'}\} \subset \{\tau''_0, \tau''_1, \dots, \tau''_{n''}\}.$$

Symbolem  $\pi' \cup \pi''$  oznaczymy podział  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  spełniający warunek

$$\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} = \{\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{n'}\} \cup \{\tau''_0, \tau''_1, \dots, \tau''_{n''}\}.$$

Oczywiście dla każdego  $\varkappa > 0$  prawdziwa jest implikacja

$$\pi \in \Pi[\ell] \Rightarrow \varkappa\pi \in \Pi[\varkappa\ell].$$

W następnej definicji (i nie tylko w niej) zostanie użyta, wspomniana na wstępie, konwencja dotycząca znaku sumy.

### Definicja 2.2.

(a) Dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$  i każdego podziału  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  przyjmujemy

$$\varepsilon_k(f, \pi) = f(\tau_{k+1}) - f(\tau_k), \quad \nu_k(f, \pi) = \frac{\varepsilon_k(f, \pi)}{\delta_k(\pi)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Następnie, dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n-1$  i każdego  $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$  definiujemy

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) &= f(-\ell) + \sum_{j=0}^{k-1} \nu_j(f, \pi) \delta_j(\pi) + \nu_k(f, \pi) (\tau - \tau_k) \\ &= f(-\ell) + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j(f, \pi) + \nu_k(f, \pi) (\tau - \tau_k) \\ &= f(\tau_k) + \frac{f(\tau_{k+1}) - f(\tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k} (\tau - \tau_k). \end{aligned}$$

(b) Powiemy, że  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest funkcją kawałkami liniową, jeżeli istnieje taki podział  $\pi \in \Pi[\ell]$ , dla którego  $\mathcal{L}_\pi f = f$ .

**Uwaga 2.2.** Występująca w definicji 2.2 funkcja  $\mathcal{L}_\pi f$  jest ciągłą. Tym sposobem, w przyjętym tu sensie, każda funkcja kawałkami liniowa jest funkcją ciągłą. Ciąg  $\{\nu_k(f, \pi)\}_{k=0}^{n-1}$  stanowi dyskretną namiastkę pochodnej funkcji  $f$ , bo jeżeli przyjmiemy

$$(\mathcal{D}_\pi f)(\tau) = \nu_k(f, \pi), \quad \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

to otrzymamy

$$(\mathcal{L}_\pi f)(\tau) = f(-\ell) + \int_{-\ell}^{\tau} (\mathcal{D}_\pi f)(t) dt, \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

Poza tym

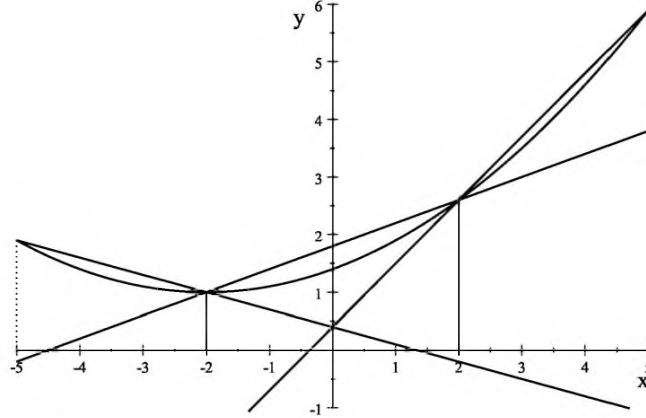
$$\{\nu_k(\mathcal{L}_\pi f, \pi)\}_{k=0}^{n-1} = \{\nu_k(f, \pi)\}_{k=0}^{n-1}.$$

Sformułujemy w tym podrozdziale jeszcze cztery definicje. Dwie z nich ochrzczimy mianem "konstrukcja", bo bardziej przypominają typowe konstrukcje z teorii całki niż, na przykład, definicję wypukłości funkcji. W końcowym etapie tego rodzaju definicji będziemy też czasem dowodzić niektórych własności konstruowanych obiektów. Podobnie czynić będziemy w następnych rozdziałach.

Oprócz wspomnianych definicji sformułujemy w tym podrozdziale pięć lematów, których można dowieść korzystając z elementarnych własności, patrz np. [20], twierdzenie 1, s 39, funkcji wypukłych oraz z tego, że  $f$  jest funkcją wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy  $-f$  jest funkcją wypukłą. W przypadku lematów 2.2 i 2.4 korzystamy w dowodach z warunku koniecznego i wystarczającego na to, by dana dystrybucja była funkcją wypukłą, patrz [6], twierdzenie 4.1.6, s 90, skracając długość dowodów. Krótki, elementarny dowód lematu 2.1 pomijamy. Zamiast dowodu umieszczamy rysunek, który (jak się nam wydaje) prezentuje ideę dowodu.

**Lemat 2.1.** *Jeżeli  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ , to:*

- (a)  *$f$  jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  ma miejsce nierówność  $\mathcal{L}_\pi f \geq f$ ;*
- (b)  *$f$  jest funkcją wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  ma miejsce nierówność  $\mathcal{L}_\pi f \leq f$ .*



**Rys. 2.1.**  $\ell = 5$ ,  $f(\tau) = \frac{1}{10}(\tau + 2)^2 + 1$ ,  $\pi = \{-5, -2, 2, 5\}$ ,  $n = 3$ ,  
 $(\mathcal{L}_\pi f)(\tau) = \max_{k=0,1,2} \left\{ f(\tau_k) + \frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} (f(\tau_{k+1}) - f(\tau_k)) \right\}.$

**Lemat 2.2.** *Jeżeli  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi \in \Pi[\ell]$  i  $\mathcal{L}_\pi f = f$ , to:*

- (a)  *$f$  jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{\nu_k(f, \pi)\}_{k=0}^{n-1}$  jest ciągiem niemalejącym;*
- (b)  *$f$  jest funkcją wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{\nu_k(f, \pi)\}_{k=0}^{n-1}$  jest ciągiem nierosnącym.*

**Dowód.** Wystarczy dowieść punktu (a). Oczywiście, gdy  $\pi = \{-\ell, \ell\}$ , dowód jest niepotrzebny. Załóżmy zatem, że  $n \geq 2$ . Dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n-1$  i każdego  $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$  mamy (patrz uwaga 2.2)

$$f'(\tau) = (\mathcal{L}_\pi f)'(\tau) = \nu_k(f, \pi),$$

więc, por. [19], przykład 2, s 23,

$$f'' = \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_k(f, \pi) - \nu_{k-1}(f, \pi)) \delta_{\{\tau_k\}},$$

gdzie  $\delta_{\{\tau\}}$  jest tak zwaną deltą Diraca, czyli dla dowolnej funkcji próbnej  $\varphi \in C_0^\infty((-\ell, \ell), \mathbb{R})$  ma miejsce równość

$$\delta_{\{\tau\}}\varphi = \varphi(\tau).$$

Korzystając teraz z twierdzenia 4.1.6, patrz [6], s 90, uzyskujemy natychmiast żądany rezultat.

Bezpośrednią konsekwencją uwagi 2.2 i lematu 2.2 jest

**Wniosek 2.1.** *Założmy, że  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\pi \in \Pi[\ell]$ .*

- (a) *Jeżeli  $f$  jest funkcją wypukłą, to  $\mathcal{L}_\pi f$  jest funkcją wypukłą.*
- (b) *Jeżeli  $f$  jest funkcją wklęsłą, to  $\mathcal{L}_\pi f$  jest funkcją wklęsłą.*

Wprowadzimy jeszcze operację, która z geometrycznego punktu widzenia jest przekształceniem wykresu danej funkcji przez jednokładność względem początku układu współrzędnych.

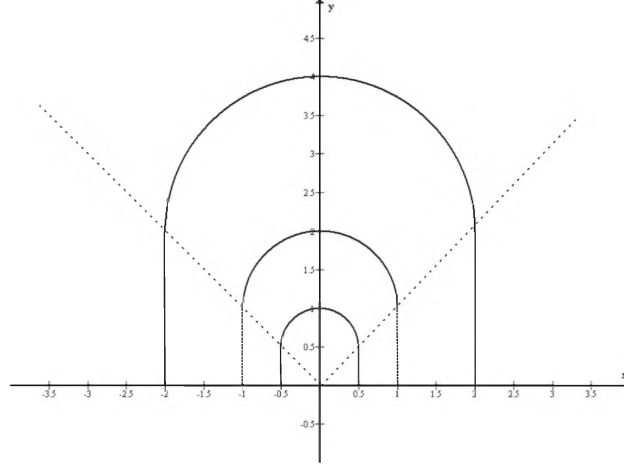
**Definicja 2.3.** *Niech będzie dane  $\ell > 0$ . Dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  i każdej liczby  $\varkappa > 0$  definiujemy*

$$(\mathcal{J}_\varkappa f)(\tau) = \varkappa f\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right), \quad \tau \in [-\varkappa\ell, \varkappa\ell].$$

**Przykład 2.1.** Dla  $\ell = 1$  oraz  $f(\tau) = 1 + \sqrt{1 - \tau^2}$  mamy

$$(\mathcal{J}_{\frac{1}{2}} f)(\tau) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \tau^2}, \quad (\mathcal{J}_2 f)(\tau) = 2 + \sqrt{4 - \tau^2}.$$





**Rys. 2.2.** Wykresy funkcji  $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}f$ ,  $f$ ,  $\mathcal{J}_2f$ .

**Uwaga 2.3.** Łatwo sprawdzić, choć bez użycia twierdzenia Talesa wymaga to nieco rachunków, że dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ , każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  i każdego  $\varkappa > 0$  ma miejsce równość

$$\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}f) = \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f).$$

Łatwo też sprawdzić, że jeżeli  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją lipschitzowską, to dla każdego  $\varkappa > 0$

$$\text{Lip } \mathcal{J}_{\varkappa}f = \text{Lip } f.$$

**Lemat 2.3.** Załóżmy, że  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i  $\varkappa > 1$ .

(a) Jeżeli  $f$  jest funkcją wklęsłą i  $f(0) > 0$ , to:

(a1) dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f\right)\right)(\tau) \leq f(\tau) - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}f(0) < f(\tau), \quad \tau \in \left[-\frac{1}{\varkappa}\ell, \frac{1}{\varkappa}\ell\right];$$

(a2) istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  spełniającego warunek  $\delta_{\max}(\pi) \leq \delta$

$$(\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}f))(\tau) \geq f(\tau) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}f(0) > f(\tau), \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

(b) Jeżeli  $g$  jest funkcją wypukłą i  $g(0) < 0$ , to:

(b1) dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g\right)\right)(\tau) \geq g(\tau) - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}g(0) > g(\tau), \quad \tau \in \left[-\frac{1}{\varkappa}\ell, \frac{1}{\varkappa}\ell\right];$$

(b2) istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[-\ell, \ell]$  spełniającego warunek  $\delta_{\max}(\pi) \leq \delta$

$$(\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}g))(\tau) \leq g(\tau) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}g(0) < g(\tau), \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

**Dowód.** Dowiedziemy punktu (a). Dowód punktu (b) jest podobny.

**Dowód punktu** (a1). Weźmy dowolne  $\tau \in \left[-\frac{1}{\varkappa}\ell, \frac{1}{\varkappa}\ell\right]$ . Ponieważ

$$\varkappa\tau \in [-\ell, \ell], \quad 0 < \frac{1}{\varkappa} < 1 \quad \text{oraz} \quad \tau = \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) 0 + \frac{1}{\varkappa} (\varkappa\tau),$$

a  $f$  jest funkcją wklęsłą, to

$$f(\tau) \geq \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) f(0) + \frac{1}{\varkappa} f(\varkappa\tau) = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} f(0) + \left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f\right)(\tau).$$

Stąd, wobec punktu (b) lematu **2.1**, dla każdego  $\tau \in \left[-\frac{1}{\varkappa}\ell, \frac{1}{\varkappa}\ell\right]$  otrzymujemy

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi} \left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f\right)\right)(\tau) \leq \left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f\right)(\tau) \leq f(\tau) - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} f(0) < f(\tau).$$

**Dowód punktu** (a2). Weźmy dowolne  $\tau \in [-\ell, \ell]$ . Ponieważ  $f$  jest funkcją wklęsłą i mamy

$$\frac{1}{\varkappa}\tau \in \left[-\frac{1}{\varkappa}\ell, \frac{1}{\varkappa}\ell\right] \subset [-\ell, \ell], \quad 0 < \frac{1}{\varkappa} < 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{\tau}{\varkappa} = \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) 0 + \frac{1}{\varkappa} \tau,$$

to

$$(\mathcal{J}_{\varkappa} f)(\tau) = \varkappa f\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right) \geq \varkappa \left( \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) f(0) + \frac{1}{\varkappa} f(\tau) \right) = f(\tau) + (\varkappa - 1) f(0).$$

Mamy zatem

$$(\mathcal{J}_{\varkappa} f)(\tau) \geq f(\tau) + (\varkappa - 1) f(0), \quad \tau \in [-\ell, \ell]. \quad (2.1)$$

Przedział  $[-\ell, \ell]$  jest zwarty, a funkcja  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i mamy  $f(0) > 0$ , więc istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla wszystkich  $s, t \in [-\ell, \ell]$  prawdziwa jest implikacja

$$|s - t| \leq \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0).$$

Ustalmy teraz dowolny podział  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  spełniający warunek

$$\delta_{\max}(\pi) \leq \delta$$

i weźmy dowolne  $\tau \in [-\ell, \ell]$ . Oszacujemy (od dołu) różnicę

$$(\mathcal{L}_{\pi} f)(\tau) - f(\tau).$$

Dla pewnego  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  mamy  $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ . Skoro

$$|\tau_{j+1} - \tau| \leq \delta \quad \text{oraz} \quad |\tau_j - \tau| \leq \delta,$$

to

$$-|f(\tau_j) - f(\tau)| \geq -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0) \quad \text{oraz} \quad -|f(\tau_{j+1}) - f(\tau)| \geq -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0)$$

i w rezultacie

$$(\mathcal{L}_{\pi} f)(\tau) - f(\tau) \geq -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0), \quad (2.2)$$

bo

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\pi f)(\tau) - f(\tau) &= f(\tau_j) + \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} (f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j)) - f(\tau) \\
&= \frac{\tau_{j+1} - \tau}{\tau_{j+1} - \tau_j} f(\tau_j) + \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} f(\tau_{j+1}) - f(\tau) \\
&= \frac{\tau_{j+1} - \tau}{\tau_{j+1} - \tau_j} (f(\tau_j) - f(\tau)) + \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} (f(\tau_{j+1}) - f(\tau)) \\
&\geq -\frac{\tau_{j+1} - \tau}{\tau_{j+1} - \tau_j} |f(\tau_j) - f(\tau)| - \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} |f(\tau_{j+1}) - f(\tau)| \\
&\geq -\left( \frac{\tau_{j+1} - \tau}{\tau_{j+1} - \tau_j} + \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} \right) \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0) \\
&= -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0).
\end{aligned}$$

W szczególności

$$(\mathcal{L}_\pi f)(0) \geq f(0) - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0) = \frac{2}{\varkappa + 1} f(0) > 0. \quad (2.3)$$

Ponieważ (patrz wniosek **2.1**)  $\mathcal{L}_\pi f$  jest funkcją wklęsłą, to spełnia założenia punktu (a). W takim razie (patrz wzór (2.1))

$$(J_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f))(\tau) - (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) \geq (\varkappa - 1)(\mathcal{L}_\pi f)(0). \quad (2.4)$$

Korzystając teraz z uwagi **2.3** oraz ze wzorów (2.4), (2.3) i (2.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_\varkappa f))(\tau) - f(\tau) &= (\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_\varkappa f))(\tau) - (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) + (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) - f(\tau) \\
&= (\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f))(\tau) - (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) + (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) - f(\tau) \\
&\geq (\varkappa - 1)(\mathcal{L}_\pi f)(0) + (\mathcal{L}_\pi f)(\tau) - f(\tau) \\
&\geq (\varkappa - 1) \frac{2}{\varkappa + 1} f(0) - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0) \\
&= \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0).
\end{aligned}$$

Dowolnemu podziałowi  $\pi \in \Pi[\ell]$  i dowolnej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  przyporządkujemy dwie nowe funkcje  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f$  oraz  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{N} f$ , których użyjemy w następnym rozdziale do konstrukcji układu obronnego. Definicje będą długie, więc zmienimy ich formę, zamieniając przy okazji słowo "definicja" słowem "konstrukcja". Użyte w oznaczeniach litery "**O**" i "**N**" pochodzą od słów obrońca i napastnik.

**Konstrukcja 2.1.** Ustalmy liczbę  $\ell > 0$ , podział  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  oraz funkcję  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Etap 1.** Dziedziny funkcji  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f$ ,  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{N} f$ . Skracając oznaczenia wprowadzone w definicjach **2.1** i **2.2**, przyjmujemy

$$\delta_k = \delta_k(\pi), \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k(f, \pi), \quad \nu_k = \nu_k(f, \pi), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dziedziną funkcji  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f$  będzie przedział  $[-\ell^\mathbf{O}(f, \pi), \ell^\mathbf{O}(f, \pi)]$ , gdzie

$$\ell^\mathbf{O}(f, \pi) = \frac{\rho^2 \ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2 + \varepsilon_k^2} \right),$$

a dziedziną funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  będzie przedział  $[-\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi), \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$ , gdzie

$$\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \frac{\sigma^2 \ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2 + \varepsilon_k^2} \right).$$

**Etap 2.** Odpowiedniki ciągów  $\{\delta_k\}_{k=0}^{n-1}$ ,  $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{n-1}$ ,  $\{\nu_k\}_{k=0}^{n-1}$ ,  $\{\tau_k\}_{k=0}^n$ .

Ciągi  $\{\delta_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+1}$ ,  $\{\delta_k^{\mathbf{N}}\}_{k=0}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \delta_0^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)|, \quad \delta_{n+1}^{\mathbf{O}} = \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(\ell)|, \\ \delta_k^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \rho \delta_{k-1} + \sigma \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \delta_0^{\mathbf{N}} &= \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)|, \quad \delta_{n+1}^{\mathbf{N}} = \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(\ell)|, \\ \delta_k^{\mathbf{N}} &= \frac{\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \sigma \delta_{k-1} + \rho \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ciągi  $\{\varepsilon_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+1}$ ,  $\{\varepsilon_k^{\mathbf{N}}\}_{k=0}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \varepsilon_{n+1}^{\mathbf{O}} = -\frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(\ell), \\ \varepsilon_k^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \varepsilon_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{N}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \varepsilon_{n+1}^{\mathbf{N}} = -\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(\ell), \\ \varepsilon_k^{\mathbf{N}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \varepsilon_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ciągi  $\{\nu_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+1}$ ,  $\{\nu_k^{\mathbf{N}}\}_{k=0}^{n+1}$ . Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  definiujemy

$$\nu_k^{\mathbf{O}} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \delta_k^{\mathbf{O}} = 0, \\ \frac{\varepsilon_k^{\mathbf{O}}}{\delta_k^{\mathbf{O}}}, & \text{gdy } \delta_k^{\mathbf{O}} > 0, \end{cases} \quad \nu_k^{\mathbf{N}} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \delta_k^{\mathbf{N}} = 0, \\ \frac{\varepsilon_k^{\mathbf{N}}}{\delta_k^{\mathbf{N}}}, & \text{gdy } \delta_k^{\mathbf{N}} > 0. \end{cases}$$

Ciągi  $\{\tau_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+2}$ ,  $\{\tau_k^{\mathbf{N}}\}_{k=0}^{n+2}$ . Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+2$  definiujemy

$$\tau_k^{\mathbf{O}} = -\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j^{\mathbf{O}} \quad \text{oraz} \quad \tau_k^{\mathbf{N}} = -\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j^{\mathbf{N}}.$$

**Etap 3.** Definicje funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$ .

Funkcja  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$ . Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  i każdego  $\tau \in [\tau_k^{\mathbf{O}}, \tau_{k+1}^{\mathbf{O}}]$  przyjmujemy

$$(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau) = \sum_{j=0}^{k-1} \nu_j^{\mathbf{O}} \delta_j^{\mathbf{O}} + (\tau - \tau_k^{\mathbf{O}}) \nu_k^{\mathbf{O}}.$$

Funkcja  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$ . Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  i każdego  $\tau \in [\tau_k^{\mathbf{N}}, \tau_{k+1}^{\mathbf{N}}]$  przyjmujemy

$$\left(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f\right)(\tau) = \sum_{j=0}^{k-1} \nu_j^{\mathbf{N}} \delta_j^{\mathbf{N}} + \left(\tau - \tau_k^{\mathbf{N}}\right) \nu_k^{\mathbf{N}}.$$

Inną (równoważną) formą definicji funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  są wzory:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f\right)(\tau) &= \int_{\tau_0^{\mathbf{O}}}^{\tau} \left(D_\pi^{\mathbf{O}} f\right)(s) ds, \quad \tau \in \left[\tau_0^{\mathbf{O}}, \tau_{n+2}^{\mathbf{O}}\right], \\ \left(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f\right)(\tau) &= \int_{\tau_0^{\mathbf{N}}}^{\tau} \left(D_\pi^{\mathbf{N}} f\right)(s) ds, \quad \tau \in \left[\tau_0^{\mathbf{N}}, \tau_{n+2}^{\mathbf{N}}\right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \left(D_\pi^{\mathbf{O}} f\right)(s) &= \nu_k^{\mathbf{O}}, \quad \text{gdy } s \in \left(\tau_k^{\mathbf{O}}, \tau_{k+1}^{\mathbf{O}}\right), \\ \left(D_\pi^{\mathbf{N}} f\right)(s) &= \nu_k^{\mathbf{N}}, \quad \text{gdy } s \in \left(\tau_k^{\mathbf{N}}, \tau_{k+1}^{\mathbf{N}}\right). \end{aligned}$$

**Etap 4.** Dziedziny i niektóre własności funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$ . Bezpośrednio z definicji funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  wynika, że obie te funkcje są ciągłe, kawałkami liniowe i spełniają warunki:

$$\left(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f\right)\left(\tau_0^{\mathbf{O}}\right) = \left(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f\right)\left(\tau_0^{\mathbf{N}}\right) = 0.$$

Oczywiście

$$\tau_0^{\mathbf{O}} = -\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) \quad \text{oraz} \quad \tau_0^{\mathbf{N}} = -\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi).$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^n \delta_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k = 2\ell,$$

to

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k^{\mathbf{O}} &= \delta_0^{\mathbf{O}} + \delta_{n+1}^{\mathbf{O}} + \sum_{k=1}^n \delta_k^{\mathbf{O}} \\ &= \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} (|f(-\ell)| + |f(\ell)|) + \frac{\rho}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{k=1}^n \left( \rho\delta_{k-1} + \sigma\sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) \\ &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{k=1}^n \delta_{k-1} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=1}^n \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) \\ &= 2\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\tau_{n+2}^{\mathbf{O}} = -\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) + \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k^{\mathbf{O}} = \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi),$$

więc dziedziną funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  jest przedział  $[-\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi), \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi)]$ . Podobnym sposobem można sprawdzić, że dziedziną funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  jest przedział  $[-\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi), \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$ .

Zauważmy jeszcze, że może być

$$-\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) = \tau_0^{\mathbf{O}} = \tau_1^{\mathbf{O}} \quad \text{lub} \quad \tau_{n+1}^{\mathbf{O}} = \tau_{n+2}^{\mathbf{O}} = \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi),$$

więc  $\{\tau_0^{\mathbf{O}}, \tau_1^{\mathbf{O}}, \dots, \tau_{n+2}^{\mathbf{O}}\}$  może nie być podziałem przedziału  $[-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}]$  w sensie definicji **2.1**, ale spełniony jest warunek

$$-\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) = \tau_0^{\mathbf{O}} \leq \tau_1^{\mathbf{O}} < \tau_2^{\mathbf{O}} < \dots < \tau_n^{\mathbf{O}} < \tau_{n+1}^{\mathbf{O}} \leq \tau_{n+2}^{\mathbf{O}} = \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi).$$

Podobnym sposobem dowodzimy poprawności definicji funkcji

$$\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f : [-\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi), \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi)] \rightarrow \mathbb{R}$$

i warunku

$$-\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \tau_0^{\mathbf{N}} \leq \tau_1^{\mathbf{N}} < \tau_2^{\mathbf{N}} < \dots < \tau_n^{\mathbf{N}} < \tau_{n+1}^{\mathbf{N}} \leq \tau_{n+2}^{\mathbf{N}} = \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi).$$

**Etap 5.** Własności funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$

**1.** Obie funkcje  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  są ciągłe i zerują się na końcach przedziału, w którym zostały określone.

**2.**  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f = \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} \mathcal{L}_\pi f$  oraz  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f = \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} \mathcal{L}_\pi f$ .

**3.** Mają miejsce nierówności

$$2\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{(\delta_k^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_k^{\mathbf{N}})^2} \leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2 + \varepsilon_k^2} \right).$$

**Dowód własności 1.** Ciągłość obu funkcji wynika bezpośrednio z ich definicji. Równości

$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f \right) \left( -\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) \right) = \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f \right) \left( -\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) \right) = 0$$

stwierdziliśmy w poprzednim etapie. W przypadku funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  mamy

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f \right) \left( \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) \right) &= \varepsilon_0^{\mathbf{O}} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{\mathbf{O}} + \varepsilon_{n+1}^{\mathbf{O}} \\ &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell) + \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{k-1} - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(\ell) \\ &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{j=1}^n (f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})) - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} (f(\ell) - f(-\ell)) \\ &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} (f(\tau_n) - f(\tau_0)) - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} (f(\ell) - f(-\ell)) \\ &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} (f(\ell) - f(-\ell)) - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} (f(\ell) - f(-\ell)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie dowodzimy równości

$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f \right) \left( \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) \right) = 0.$$

**Dowód własności 2.** W definicjach funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  uwzględnione są wartości funkcji  $f$  tylko w punktach podziału  $\pi$ , a te pokrywają się z wartościami funkcji  $\mathcal{L}_\pi f$ . Stąd wynikają napisane w punkcie **2** obie równości.

**Dowód własności 3.** Pierwsza nierówność jest konsekwencją równości

$$2\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k^{\mathbf{N}}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} (\delta_0^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_0^{\mathbf{N}})^2 &= \frac{\rho^2 \sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} f^2(-\ell) + \frac{\sigma^4}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} f^2(-\ell) = \frac{\sigma^2(\sigma^2 + \rho^2)}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} f^2(-\ell) \\ &= \frac{\sigma^2}{(\sigma - \rho)^2} \frac{\sigma^2 + \rho^2}{(\sigma + \rho)^2} f^2(-\ell) \leq \frac{\sigma^2}{(\sigma - \rho)^2} f^2(-\ell), \end{aligned}$$

więc

$$\sqrt{(\delta_0^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_0^{\mathbf{N}})^2} \leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} |f(-\ell)|.$$

Podobnie dowodzimy nierówności

$$\sqrt{(\delta_{n+1}^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_{n+1}^{\mathbf{N}})^2} \leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} |f(\ell)|.$$

Natomiast dla  $k = 1, 2, \dots, n$  mamy

$$\begin{aligned} (\delta_k^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_k^{\mathbf{N}})^2 &= \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} \left( \sigma \delta_{k-1} + \rho \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right)^2 + \frac{\sigma^4}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} \varepsilon_{k-1}^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} \left( \left( \sigma \delta_{k-1} + \rho \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right)^2 + \sigma^2 \varepsilon_{k-1}^2 \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} \left( (\sigma^2 + \rho^2) (\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2) + 2\rho\sigma\delta_{k-1}\sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) \end{aligned}$$

oraz

$$2\delta_{k-1}\sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \leq \delta_{k-1}^2 + \delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2 \leq 2(\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2),$$

więc

$$\begin{aligned} (\delta_k^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_k^{\mathbf{N}})^2 &\leq \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} \left( (\sigma^2 + \rho^2) (\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2) + 2\rho\sigma(\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2) \right) \\ &= \frac{\sigma^2(\sigma + \rho)^2}{(\sigma^2 - \rho^2)^2} (\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2) = \frac{\sigma^2}{(\sigma - \rho)^2} (\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2). \end{aligned}$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{(\delta_k^{\mathbf{N}})^2 + (\varepsilon_k^{\mathbf{N}})^2} &\leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=1}^n \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \left( |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2 + \varepsilon_k^2} \right). \end{aligned}$$

Oprócz trzech wyżej wymienionych bardzo ważną własnością obu operacji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}}$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}}$  jest zachowywanie (przy pewnych dodatkowych założeniach) wypukłości i wklęsłości funkcji.

**Lemat 2.4.** Załóżmy, że  $\ell > 0$ ,  $\pi \in \Pi[\ell]$  i  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ . Przy tych założeniach, jeżeli  $f$  jest niedodatnią funkcją wypukłą, to obie funkcje  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}}$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}}$  są niedodatnie i wypukłe, a jeżeli  $f$  jest nieujemną funkcją wklęsłą, to obie funkcje  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}}$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}}$  są nieujemne i wklęsłe.

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $f$  jest niedodatnią funkcją wypukłą. Jeżeli  $f$  jest nieujemną funkcją wklęsłą, to rozumowanie jest podobne. Z analogicznych powodów jak wyżej dowiedzimy tylko niedodatniości i wypukłości funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$ . W dowodzie wykorzystamy warunek konieczny i wystarczający na to, by dana funkcja była wypukła (patrz [6], twierdzenie 4.1.6, s 90) oraz to, że funkcja

$$\mathbb{R} \ni \nu \mapsto \phi(\nu) = \frac{\nu}{\varkappa + \sqrt{1 + \nu^2}} \in (-1, 1),$$

gdzie  $\varkappa \geq 0$ , jest ściśle rosnąca i spełnia warunki:

$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \phi(\nu) = -1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi(\nu) = 1.$$

Przyjmijmy

$$\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}.$$

Niech (patrz konstrukcja 2.1, etapy 2 i 4)  $\{\nu_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+1}$  i  $\{\tau_k^{\mathbf{O}}\}_{k=0}^{n+2}$ , gdzie

$$-\ell^{\mathbf{O}}(f, \pi) = \tau_0^{\mathbf{O}} \leq \tau_1^{\mathbf{O}} < \tau_2^{\mathbf{O}} < \dots < \tau_n^{\mathbf{O}} < \tau_{n+1}^{\mathbf{O}} \leq \tau_{n+2}^{\mathbf{O}} = \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi),$$

będą odpowiednikami ciągu  $\{\nu_k\}_{k=0}^{n-1}$  i podziału  $\pi$ . Dla  $k = 1, 2, \dots, n$  mamy

$$\begin{aligned} \nu_k^{\mathbf{O}} &= \frac{\varepsilon_k^{\mathbf{O}}}{\delta_k^{\mathbf{O}}} = \frac{\rho \varepsilon_{k-1}}{\rho \delta_{k-1} + \sigma \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2}} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\varepsilon_{k-1}}{\delta_{k-1} + \sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2}} \\ &= \frac{\rho}{\sigma} \frac{\frac{\varepsilon_{k-1}}{\delta_{k-1}}}{\frac{\rho}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{k-1}^2}{\delta_{k-1}^2}}} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\nu_{k-1}}{\frac{\rho}{\sigma} + \sqrt{1 + \nu_{k-1}^2}}. \end{aligned}$$

Natomiast

$$\nu_0^{\mathbf{O}} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } f(-\ell) = 0, \\ \frac{\rho}{\sigma} \frac{f(-\ell)}{|f(-\ell)|}, & \text{gdy } f(-\ell) < 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } f(-\ell) = 0, \\ -\frac{\rho}{\sigma}, & \text{gdy } f(-\ell) < 0, \end{cases}$$

$$\nu_{n+1}^{\mathbf{O}} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } f(\ell) = 0, \\ -\frac{\rho}{\sigma} \frac{f(\ell)}{|f(\ell)|}, & \text{gdy } f(\ell) < 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } f(\ell) = 0, \\ \frac{\rho}{\sigma}, & \text{gdy } f(\ell) < 0, \end{cases}$$

więc z uwagi na lemat 2.2 i wspomniane wyżej własności funkcji  $\phi$ , otrzymujemy

$$-\frac{\rho}{\sigma} < \nu_1^{\mathbf{O}} \leq \dots \leq \nu_n^{\mathbf{O}} < \frac{\rho}{\sigma}.$$



Zatem  $(\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f)'' \geq 0$ , bo (zależnie od możliwego przypadku)

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f)'' \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_{k+1}^\mathbf{O} - \nu_k^\mathbf{O}) \delta_{\{\tau_{k+1}^\mathbf{O}\}}, \text{ gdy } f(-\ell) = f(\ell) = 0, \\
&= \left( \nu_1^\mathbf{O} + \frac{\rho}{\sigma} \right) \delta_{\{\tau_1^\mathbf{O}\}} + \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_{k+1}^\mathbf{O} - \nu_k^\mathbf{O}) \delta_{\{\tau_{k+1}^\mathbf{O}\}}, \text{ gdy } f(-\ell) < 0, f(\ell) = 0, \\
&= \left( \frac{\rho}{\sigma} - \nu_n^\mathbf{O} \right) \delta_{\{\tau_{n+1}^\mathbf{O}\}} + \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_{k+1}^\mathbf{O} - \nu_k^\mathbf{O}) \delta_{\{\tau_{k+1}^\mathbf{O}\}}, \text{ gdy } f(-\ell) = 0, f(\ell) < 0, \\
&= \left( \nu_1^\mathbf{O} + \frac{\rho}{\sigma} \right) \delta_{\{\tau_1^\mathbf{O}\}} + \left( \frac{\rho}{\sigma} - \nu_n^\mathbf{O} \right) \delta_{\{\tau_{n+1}^\mathbf{O}\}} + \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_{k+1}^\mathbf{O} - \nu_k^\mathbf{O}) \delta_{\{\tau_{k+1}^\mathbf{O}\}}, \\
&\quad \text{gdy } f(-\ell) < 0, f(\ell) < 0.
\end{aligned}$$

Kończy to dowód wypukłości funkcji  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f$ . Ponieważ (patrz konstrukcja **2.1**, etap **5**)

$$(\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f)(-\ell^\mathbf{O}(f, \pi)) = (\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f)(\ell^\mathbf{O}(f, \pi)) = 0,$$

a funkcja wypukła, określona w przedziale zwartym, zawsze osiąga maksimum globalne co najmniej w jednym z końców tego przedziału, to

$$\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f \leq 0.$$

Wyznaczenie funkcji  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f$ ,  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{N} f$  nie jest trudne, ale jest dość uciążliwe nawet w bardzo prostych przypadkach. Podamy jeden przykład.

**Przykład 2.2.** Obierzmy dowolnie  $\ell > 0$ , dwie liczby  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  i dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  zdefiniujmy

$$f(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \tau.$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned}
\pi &= \{-\ell, \ell\}, \\
\ell^\mathbf{O} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( |\mu_1| + \ell \sqrt{1 + \mu_2^2} \right), \\
\ell^\mathbf{N} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( |\mu_1| + \ell \sqrt{1 + \mu_2^2} \right) = \ell^\mathbf{O} + \ell.
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów podanych w konstrukcji **2.1** łatwo sprawdzić, że jeżeli

$$f(-\ell) > 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) > 0,$$

to

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O} f)(\tau) &= \min \left\{ \frac{\rho}{\sigma} (\ell^\mathbf{O} + \tau), \varepsilon_0^\mathbf{O} + \nu_1^\mathbf{O} (\tau - \tau_1^\mathbf{O}), \frac{\rho}{\sigma} (\ell^\mathbf{O} - \tau) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^\mathbf{O}, \ell^\mathbf{O}], \\
(\mathcal{S}_\pi^\mathbf{N} f)(\tau) &= \min \left\{ \frac{\sigma}{\rho} (\ell^\mathbf{N} + \tau), \varepsilon_0^\mathbf{N} + \nu_1^\mathbf{N} (\tau - \tau_1^\mathbf{N}), \frac{\sigma}{\rho} (\ell^\mathbf{N} - \tau) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^\mathbf{N}, \ell^\mathbf{N}],
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \nu_1^{\mathbf{O}} = \frac{\rho\mu_2}{\rho + \sigma\sqrt{1 + \mu_2^2}}, \quad \tau_1^{\mathbf{O}} = -\ell^{\mathbf{O}} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \\ \varepsilon_0^{\mathbf{N}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma\mu_2}{\sigma + \rho\sqrt{1 + \mu_2^2}}, \quad \tau_1^{\mathbf{N}} = -\ell^{\mathbf{N}} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell),\end{aligned}$$

a jeżeli

$$f(-\ell) < 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) < 0,$$

to

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau) &= \max \left\{ -\frac{\rho}{\sigma} (\ell^{\mathbf{O}} + \tau), \varepsilon_0^{\mathbf{O}} + \nu_1^{\mathbf{O}} (\tau - \tau_1^{\mathbf{O}}), \frac{\rho}{\sigma} (\tau - \ell^{\mathbf{O}}) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}], \\ (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau) &= \max \left\{ -\frac{\sigma}{\rho} (\ell^{\mathbf{N}} + \tau), \varepsilon_0^{\mathbf{N}} + \nu_1^{\mathbf{N}} (\tau - \tau_1^{\mathbf{N}}), \frac{\sigma}{\rho} (\tau - \ell^{\mathbf{N}}) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}],\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \nu_1^{\mathbf{O}} = \frac{\rho\mu_2}{\rho + \sigma\sqrt{1 + \mu_2^2}}, \quad \tau_1^{\mathbf{O}} = -\ell^{\mathbf{O}} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)|, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{N}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell), \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma\mu_2}{\sigma + \rho\sqrt{1 + \mu_2^2}}, \quad \tau_1^{\mathbf{N}} = -\ell^{\mathbf{N}} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)|.\end{aligned}$$

W przypadkach

$$\begin{aligned}f(-\ell) &= 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) > 0, \\ f(-\ell) &= 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) < 0, \\ f(-\ell) &> 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) = 0, \\ f(-\ell) &< 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) = 0\end{aligned}$$

podane wyżej wzory ulegną stosownym modyfikacjom. Na przykład, jeżeli

$$f(-\ell) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(\ell) > 0,$$

to

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau) &= \min \left\{ \nu_1^{\mathbf{O}} (\ell^{\mathbf{O}} + \tau), \frac{\rho}{\sigma} (\ell^{\mathbf{O}} - \tau) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}], \\ (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau) &= \min \left\{ \nu_1^{\mathbf{N}} (\ell^{\mathbf{N}} + \tau), \frac{\sigma}{\rho} (\ell^{\mathbf{N}} - \tau) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}],\end{aligned}$$

gdzie

$$\nu_1^{\mathbf{O}} = \frac{\rho\mu_2}{\rho + \sigma\sqrt{1 + \mu_2^2}}, \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma\mu_2}{\sigma + \rho\sqrt{1 + \mu_2^2}}.$$

Rozważmy teraz trzy przypadki szczególne. Przyjmijmy

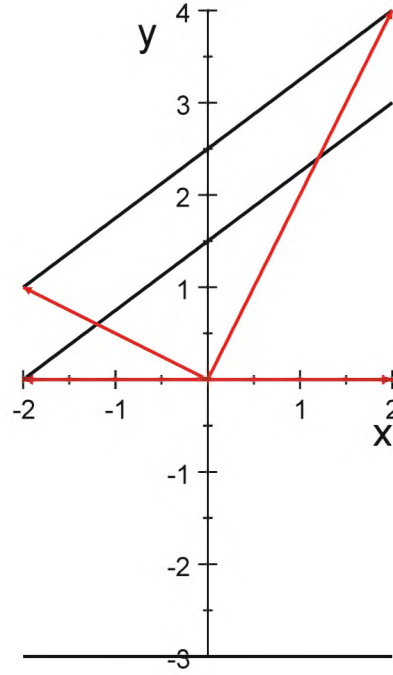
$$\ell = 2, \quad \pi = \{-2, 2\}, \quad \rho = 1, \quad \sigma = 2$$

i dla każdego  $\tau \in [-2, 2]$  zdefiniujemy

$$f(\tau) = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\tau, \quad g(\tau) = -3, \quad h(\tau) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\tau.$$

Ponadto (dla dalszych celów) zdefiniujemy

$$\begin{aligned} d_0 &= \begin{bmatrix} -\ell \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \begin{bmatrix} -\ell \\ f(-\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ d_2 &= \begin{bmatrix} \ell \\ f(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad d_3 = \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



**Rys. 2.3.** Wykresy funkcji  $f, g$  i  $h$  wraz z wektorami  $d_0, d_1, d_2, d_3$ .

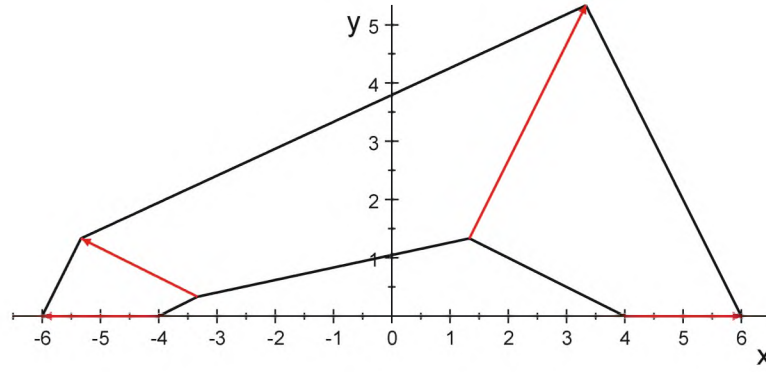
Przypadek funkcji  $f$ . Mamy

$$\begin{aligned} f(-2) &= 1 > 0, \quad f(2) = 4 > 0, \\ \mu_1 &= \frac{5}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} \ell^{\mathbf{O}} &= 4, \quad \ell^{\mathbf{N}} = 6, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{O}} &= \frac{1}{3}, \quad \nu_1^{\mathbf{O}} = \frac{3}{14}, \quad \tau_1^{\mathbf{O}} = -\frac{10}{3}, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{N}} &= \frac{4}{3}, \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{6}{13}, \quad \tau_1^{\mathbf{N}} = -\frac{16}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau) &= \min \left\{ \frac{1}{2}\tau + 2, \frac{3}{14}\tau + \frac{22}{21}, 2 - \frac{1}{2}\tau \right\}, \quad \tau \in [-4, 4], \\ (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau) &= \min \left\{ 2\tau + 12, \frac{6}{13}\tau + \frac{148}{39}, 12 - 2\tau \right\}, \quad \tau \in [-6, 6]. \end{aligned}$$



**Rys. 2.4.** Wykresy funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f$  wraz z wektorami  $d_0, d_1, d_2, d_3$ .

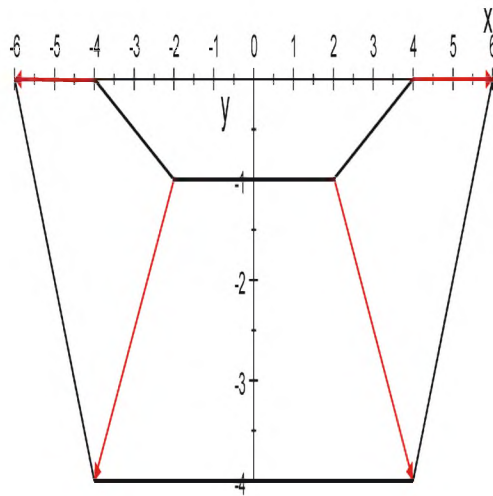
Przypadek funkcji  $g$ . Mamy

$$\begin{aligned} g(-2) &= g(2) = -3 < 0, \\ \mu_1 &= -3, \mu_2 = 0, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} \ell^{\mathbf{O}} &= 4, \ell^{\mathbf{N}} = 6, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{O}} &= -1, \nu_1^{\mathbf{O}} = 0, \tau_1^{\mathbf{O}} = -2, \\ \varepsilon_0^{\mathbf{N}} &= -4, \nu_1^{\mathbf{N}} = 0, \tau_1^{\mathbf{N}} = -4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g)(\tau) &= \max \left\{ -\frac{1}{2}\tau - 2, -1, \frac{1}{2}\tau - 2 \right\}, \tau \in [-4, 4], \\ (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g)(\tau) &= \max \{ -2\tau - 12, -4, 2\tau - 12 \}, \tau \in [-6, 6]. \end{aligned}$$



**Rys. 2.5.** Wykresy funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g$  wraz z wektorami  $d_0, d_1, d_2, d_3$ .

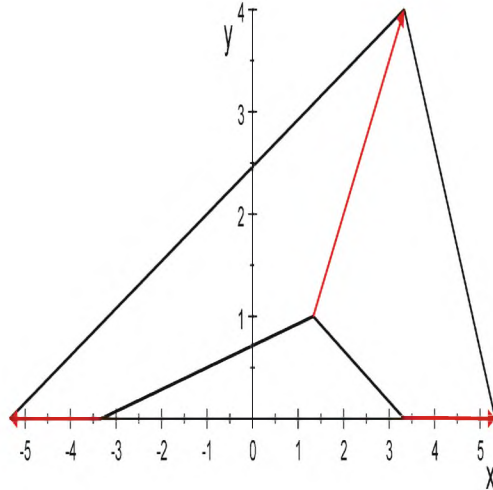
Przypadek funkcji  $h$ . Mamy

$$\begin{aligned} h(-2) &= 0, \quad h(2) = 3 > 0, \\ \mu_1 &= \frac{3}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} \ell^{\mathbf{O}} &= \frac{10}{3}, \quad \ell^{\mathbf{N}} = \frac{16}{3}, \\ \nu_1^{\mathbf{O}} &= \frac{3}{14}, \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{6}{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} h)(\tau) &= \min \left\{ \frac{3}{14}\tau + \frac{5}{7}, \frac{5}{3} - \frac{1}{2}\tau \right\}, \\ (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} h)(\tau) &= \min \left\{ \frac{6}{13}\tau + \frac{32}{13}, \frac{32}{3} - 2\tau \right\}. \end{aligned}$$



**Rys. 2.6.** Wykresy funkcji  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} h$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} h$  wraz z wektorami  $d_0, d_1, d_2$ .

Następną konstrukcję poprzedzimy obserwacją pewnej istotnej własności jaką posiadają wszystkie trzy pary  $(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)$ ,  $(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g)$ ,  $(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} h, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} h)$ . Weźmy pod uwagę parę  $(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)$  i przyjmijmy (patrz rysunki **2.3** i **2.4**)

$$\begin{aligned} d_0^{\mathbf{O}} &= \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_0^{\mathbf{O}}) \\ \tau_0^{\mathbf{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_1^{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_1^{\mathbf{O}}) \\ \tau_1^{\mathbf{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\ d_2^{\mathbf{O}} &= \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_2^{\mathbf{O}}) \\ \tau_2^{\mathbf{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad d_3^{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_3^{\mathbf{O}}) \\ \tau_3^{\mathbf{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_0^{\mathbf{N}} &= \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_0^{\mathbf{N}}) \\ \tau_0^{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_1^{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_1^{\mathbf{N}}) \\ \tau_1^{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \\ d_2^{\mathbf{N}} &= \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_2^{\mathbf{N}}) \\ \tau_2^{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}, \quad d_3^{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_3^{\mathbf{N}}) \\ \tau_3^{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$d_k^{\mathbf{N}} - d_k^{\mathbf{O}} = d_k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

oraz

$$\|d_{k+1}^{\mathbf{O}} - d_k^{\mathbf{O}}\| = \frac{1}{2} \|d_{k+1}^{\mathbf{N}} - d_k^{\mathbf{N}}\| = \frac{\rho}{\sigma} \|d_{k+1}^{\mathbf{N}} - d_k^{\mathbf{N}}\|. \quad k = 0, 1, 2.$$

Zdefiniujemy odwzorowanie związane z wprowadzonymi operacjami  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}}$  i  $\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}}$ . Definicja nie będzie aż tak długa jak w przypadku tych operacji, ale ochrzczimy ją również mianem "konstrukcja".

**Konstrukcja 2.2.** Ustalmy liczbę  $\ell > 0$ , podział  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  oraz funkcję  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Etap 1.** Dodatkowe i pomocnicze oznaczenia. Przyjmujemy

$$\begin{aligned} d_0(f, \pi) &= (-\ell, 0), \quad d_{n+2}(f, \pi) = (\ell, 0), \\ d_k(f, \pi) &= (\tau_{k-1}, f(\tau_{k-1})), \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \end{aligned}$$

i korzystając z oznaczeń użytych w konstrukcji **2.1**, przyjmiemy dalej

$$d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) = (\tau_k^{\mathbf{O}}, (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_k^{\mathbf{O}})), \quad d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) = (\tau_k^{\mathbf{N}}, (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_k^{\mathbf{N}})), \quad k = 0, 1, \dots, n+2,$$

$$\mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi] = \bigcup_{k=0}^{n+1} [d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi)], \quad \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] = \bigcup_{k=0}^{n+1} [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)].$$

**Etap 2.** Definicja odwzorowania  $F_{(f, \pi)} : \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] \rightarrow \mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi]$ . Poprzedzimy definicję odwzorowania  $F_{(f, \pi)}$  kilkoma obserwacjami. Z definicji punktów  $d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)$  i  $d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)$  wynika, że jedynym punktem wspólnym dwóch przedziałów

$$[d_j^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{j+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi)], \quad [d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi)]$$

lub dwóch przedziałów

$$[d_j^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{j+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)], \quad [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$$

może być co najwyżej ich wspólny koniec. Obie łamane  $\mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi]$  i  $\mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi]$  dają się zatem przedstawić w postaci sum rozłącznych:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi] &= \{d_{n+2}^{\mathbf{O}}(f, \pi)\} \cup \bigcup_{k=0}^{n+1} [d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi)], \\ \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] &= \{d_{n+2}^{\mathbf{N}}(f, \pi)\} \cup \bigcup_{k=0}^{n+1} [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]. \end{aligned}$$

Z drugiej strony wiemy, że możliwe są przypadki:

$$[d_0(f, \pi), d_1(f, \pi)) = [d_0^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_1^{\mathbf{O}}(f, \pi)) = [d_0^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_1^{\mathbf{N}}(f, \pi)) = \emptyset$$

lub

$$[d_{n+1}(f, \pi), d_{n+2}(f, \pi)) = [d_{n+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{n+2}^{\mathbf{O}}(f, \pi)) = [d_{n+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{n+2}^{\mathbf{N}}(f, \pi)) = \emptyset.$$

W związku z powyższym wybierzemy następującą formę definicji odwzorowania  $F_{(f,\pi)}$ . Przyjmujemy

$$F_{(f,\pi)}(d_0^{\mathbf{N}}(f, \pi)) = d_0^{\mathbf{O}}(f, \pi), \quad F_{(f,\pi)}(d_{n+2}^{\mathbf{N}}(f, \pi)) = d_{n+2}^{\mathbf{O}}(f, \pi).$$

Następnie, dla każdego

$$\eta \in \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] \setminus \{d_{n+2}^{\mathbf{N}}(f, \pi)\} = \bigcup_{k=0}^{n+1} [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi))$$

wybieramy jedyne  $k$  o tej własności, że

$$\eta \in [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi))$$

i przyjmujemy

$$F_{(f,\pi)}(\eta) = d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) + \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)).$$

**Etap 3.** Własności odwzorowania  $F_{(f,\pi)} : \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] \rightarrow \mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi]$ . Łatwo sprawdzić, że  $F_{(f,\pi)}$  jest odwzorowaniem ciągłym i spełnia warunki

$$\begin{aligned} F_{(f,\pi)}([d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]) &= [d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi)], \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \\ F_{(f,\pi)}(d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)) &= d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi), \quad k = 0, 1, \dots, n+2. \end{aligned}$$

Dwie inne własności odwzorowania  $F_{(f,\pi)}$  zawiera

**Lemat 2.5.** *Ustalmy liczbę  $\ell > 0$ , podział  $\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi[\ell]$  oraz funkcję  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ .*

(a) *Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+2$  mamy*

$$d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) = d_k(f, \pi),$$

*a dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  i każdego  $\eta \in [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$*

$$\eta - F_{(f,\pi)}(\eta) \in [d_k(f, \pi), d_{k+1}(f, \pi)].$$

(b) *Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , jeżeli  $\eta, \tilde{\eta} \in [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$ , to*

$$\|F_{(f,\pi)}(\eta) - F_{(f,\pi)}(\tilde{\eta})\| \leq \frac{\rho}{\sigma} \|\eta - \tilde{\eta}\|.$$

**Dowód punktu (a).** Dla  $k = 0$  mamy

$$\begin{aligned} d_0^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_0^{\mathbf{O}}(f, \pi) &= (\tau_0^{\mathbf{N}} - \tau_0^{\mathbf{O}}, (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_0^{\mathbf{N}}) - (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau_0^{\mathbf{O}})) \\ &= (-\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) + \ell^{\mathbf{O}}(f, \pi), 0 - 0) = (-\ell, 0) = d_0(f, \pi). \end{aligned}$$

Twierdzimy, że dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  ma miejsce równość

$$d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) - (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)) = d_{k+1}(f, \pi) - d_k(f, \pi). \quad (2.5)$$

Istotnie, dla każdego  $k = 0, 1, \dots, n+1$  mamy

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) &= (\tau_{k+1}^{\mathbf{N}} - \tau_k^{\mathbf{N}}, (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_{k+1}^{\mathbf{N}}) - (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau_k^{\mathbf{N}})) \\ &= (\tau_{k+1}^{\mathbf{N}} - \tau_k^{\mathbf{N}}, \nu_k^{\mathbf{N}}(\tau_{k+1}^{\mathbf{N}} - \tau_k^{\mathbf{N}})) = (\delta_k^{\mathbf{N}}, \varepsilon_k^{\mathbf{N}}) \end{aligned}$$

i z analogicznych powodów

$$d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) = (\delta_k^{\mathbf{O}}, \varepsilon_k^{\mathbf{O}}).$$

Zatem

$$d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) - (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)) = (\delta_k^{\mathbf{N}} - \delta_k^{\mathbf{O}}, \varepsilon_k^{\mathbf{N}} - \varepsilon_k^{\mathbf{O}}).$$

Jeżeli  $k = 0$ , to

$$\begin{aligned} &(\delta_k^{\mathbf{N}} - \delta_k^{\mathbf{O}}, \varepsilon_k^{\mathbf{N}} - \varepsilon_k^{\mathbf{O}}) \\ &= \left( \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)| - \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(-\ell)|, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell) - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(-\ell) \right) \\ &= (0, f(-\ell)) = (-\ell, f(-\ell)) - (-\ell, 0) = d_1(f, \pi) - d_0(f, \pi). \end{aligned}$$

Jeżeli  $0 < k < n+1$ , to

$$\begin{aligned} &\delta_k^{\mathbf{N}} - \delta_k^{\mathbf{O}} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \sigma\delta_{k-1} + \rho\sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) - \frac{\rho}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \rho\delta_{k-1} + \sigma\sqrt{\delta_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^2} \right) \\ &= \delta_{k-1} \end{aligned}$$

oraz

$$\varepsilon_k^{\mathbf{N}} - \varepsilon_k^{\mathbf{O}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \varepsilon_{k-1} - \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_{k-1},$$

więc

$$\begin{aligned} (\delta_k^{\mathbf{N}} - \delta_k^{\mathbf{O}}, \varepsilon_k^{\mathbf{N}} - \varepsilon_k^{\mathbf{O}}) &= (\delta_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) = (\tau_k - \tau_{k-1}, f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})) \\ &= d_{k+1}(f, \pi) - d_k(f, \pi). \end{aligned}$$

Jeżeli  $k = n+1$ , to

$$\begin{aligned} &(\delta_k^{\mathbf{N}} - \delta_k^{\mathbf{O}}, \varepsilon_k^{\mathbf{N}} - \varepsilon_k^{\mathbf{O}}) \\ &= \left( \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(\ell)| - \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} |f(\ell)|, -\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(\ell) + \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} f(\ell) \right) \\ &= (0, -f(\ell)) = (\ell, 0) - (\ell, f(\ell)) = d_{n+2}(f, \pi) - d_{n+1}(f, \pi). \end{aligned}$$

W takim razie, skoro

$$d_0^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_0^{\mathbf{O}}(f, \pi) = d_0(f, \pi),$$

to korzystając z warunku (2.5), dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n+2$  otrzymamy

$$\begin{aligned} d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) &= d_0^{\mathbf{N}}(f, \pi) + \sum_{j=0}^{k-1} (d_{j+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_j^{\mathbf{N}}(f, \pi)) \\ &\quad - d_0^{\mathbf{O}}(f, \pi) - \sum_{j=0}^{k-1} (d_{j+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_j^{\mathbf{O}}(f, \pi)) \\ &= d_0(f, \pi) + \sum_{j=0}^{k-1} (d_{j+1}(f, \pi) - d_j(f, \pi)) = d_k(f, \pi). \end{aligned}$$



Kończy to dowód pierwszej części punktu (a). Ustalmy dowolnie

$$k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{oraz} \quad \eta \in [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)].$$

Ponieważ

$$\eta = d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) + \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)),$$

to

$$\begin{aligned} & \eta - F_{(f, \pi)}(\eta) \\ = & d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi) + \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)) \\ & - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) - \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)) \\ = & d_k(f, \pi) + \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}(f, \pi) - d_k(f, \pi)) \\ \in & [d_k(f, \pi), d_{k+1}(f, \pi)], \end{aligned}$$

co kończy dowód punktu (a).

**Dowód punktu (b).** Łatwo sprawdzić, że

$$\|d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)\| = \frac{\rho}{\sigma} \|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|, \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Zatem, jeżeli  $d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) \neq d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)$  i  $\eta, \tilde{\eta} \in [d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi)]$ , to

$$\begin{aligned} F_{(f, \pi)}(\eta) - F_{(f, \pi)}(\tilde{\eta}) &= d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) + \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)) \\ &\quad - \left( d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi) + \frac{\|\tilde{\eta} - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)) \right) \\ &= \frac{\|\eta - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\| - \|\tilde{\eta} - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} (d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)), \end{aligned}$$

więc

$$\|F_{(f, \pi)}(\eta) - F_{(f, \pi)}(\tilde{\eta})\| \leq \frac{\|d_{k+1}^{\mathbf{O}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{O}}(f, \pi)\|}{\|d_{k+1}^{\mathbf{N}}(f, \pi) - d_k^{\mathbf{N}}(f, \pi)\|} \|\eta - \tilde{\eta}\| = \frac{\rho}{\sigma} \|\eta - \tilde{\eta}\|.$$

## 2.2. Wariacja i długość krzywej

Celem dość skomplikowanych konstrukcji podrozdziału **2.1** jest aproksymacja układów obrotowych rozważanych w następnym rozdziale. Potrzebna będzie przy tym (między innymi) kontrola wzajemnych relacji pomiędzy obwodami rozmaitych

zbiorów wypukłych. Dlatego zaczniemy od prezentacji potrzebnych własności jednowymiarowej miary Hausdorffa zaczerpniętych z książek [5] i [4].

Długością dowolnego zbioru  $Z \subset \mathbb{R}^m$  będziemy nazywać jednowymiarową miarę Hausdorffa tego zbioru, czyli (patrz [4], rozdział 2 lub [5], podrozdział 2.10.2) wielkość

$$\mathcal{H}^1(Z) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^1(Z) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^1(Z),$$

gdzie

$$\mathcal{H}_\delta^1(Z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } Z_j : Z \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j, \text{diam } Z_j \leq \delta \right\},$$

a dla każdego niepustego zbioru  $A \subset \mathbb{R}^m$

$$\text{diam } A = \sup_{a, b \in A} \|a - b\|.$$

**Uwaga 2.4.** Zauważmy, że miara Hausdorffa jest definiowana dla każdego zbioru. Warunek

$$\mathcal{H}^1(\kappa Z) = \kappa \mathcal{H}^1(Z), \quad \kappa > 0,$$

i niezmienniczość miary  $\mathcal{H}^1$  względem izometrii wynikają niemal bezpośrednio z definicji tej miary. Oczywiście dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}^2$  mamy

$$\|a - b\| = \mathcal{H}^1([a, b]) = \mathcal{H}^1((a, b)) = \mathcal{H}^1([a, b]) = \mathcal{H}^1([a, b]).$$

Trzy ostatnie z wymienionych wyżej równości również wynikają niemal bezpośrednio z definicji miary  $\mathcal{H}^1$ . Natomiast, jeżeli  $a \neq b$ , to pierwsza równość przestaje być oczywista dopiero wtedy, gdy zaczynamy jej dowodzić, por. dowód punktu (ii) twierdzenia 2 na stronie 63 w książce [4] lub dowód oczywistego wniosku 2.10.12 na stronie 176 w książce [5]. Wydaje się, że najkrótszym dowodem równości

$$\|a - b\| = \mathcal{H}^1([a, b])$$

jest użycie standardowej parametryzacji odcinka  $[a, b]$ :  $x(t) = a + t(b - a)$ ,  $t \in [0, 1]$  i skorzystanie ze wzoru

$$\mathcal{H}^1([a, b]) = \int_0^1 \|x'(t)\| dt,$$

patrz [4], s 101, lub skorzystanie z podanych nieco niżej uwag 2.8 i 2.9 (z których, między innymi, ten wzór też wynika).

#### Definicja 2.4

(a) Dla każdego  $F : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$  i każdego  $\pi = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \in \Pi[\ell]$  przyjmujemy

$$\vartheta_\pi F = \sum_{k=0}^{n-1} \|F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)\|, \quad \vartheta f = \sup_{\pi \in \Pi[\ell]} \vartheta_\pi F.$$

(b) Dla każdego  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  przyjmujemy

$$(\Gamma f)(\tau) = (\tau, f(\tau)), \quad \tau \in [-\ell, \ell],$$

oraz

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &= |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \mathcal{H}^1((\Gamma f)([-\ell, \ell])), \\ \mathfrak{L}(f) &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \Lambda(f).\end{aligned}$$

### Uwagi

**2.5.** Dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  i dla każdego  $\varkappa > 0$  ma miejsce równość

$$\Gamma(\mathcal{J}_\varkappa f) = \varkappa \Gamma f,$$

będąca jednym z powodów wprowadzenia operacji  $\mathcal{J}_\varkappa$ .

**2.6.** Dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$  i każdego  $\varkappa > 0$  mają miejsce równości

$$\Lambda(\mathcal{J}_\varkappa f) = \varkappa \Lambda(f), \quad \mathfrak{L}(\mathcal{J}_\varkappa f) = \varkappa \mathfrak{L}(f).$$

Łatwo tego dowieść korzystając z uwagi **2.5**, definicji funkcjonału  $\Lambda$  i definicji miary  $\mathcal{H}^1$ . Można też użyć punktu (iv) twierdzenia **2**, patrz [4], s **63**.

**2.7.** Dla każdej funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  i każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  mamy (patrz konstrukcja **2.1**, etap **5**, punkt **3**)

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{L}_\pi f) &= |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2(f, \pi) + \varepsilon_k^2(f, \pi)} \\ \mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f) &= \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \frac{\sigma^2 \ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \Lambda(\mathcal{L}_\pi f), \\ 2\mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f) &\leq \Lambda(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f) = \sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{(\delta_k^{\mathbf{N}}(f, \pi))^2 + (\varepsilon_k^{\mathbf{N}}(f, \pi))^2} \leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(\mathcal{L}_\pi f).\end{aligned}$$

**2.8.** Jeżeli funkcja  $F : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i różnowartościowa, to (patrz [5], twierdzenie **2.10.13**, s **177**)

$$\mathcal{H}^1(F([-\ell, \ell])) = \vartheta F.$$

**2.9.** Jeżeli funkcja  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  jest absolutnie ciągła, to  $\Gamma f$  jest funkcją absolutnie ciągłą i różnowartościową, więc (patrz [5], wniosek **2.9.20**, s **165** i podrozdział **2.9.22**, s **167**)

$$\mathcal{H}^1((\Gamma f)([-\ell, \ell])) = \vartheta(\Gamma f) = \int_{-\ell}^{\ell} \|(\Gamma f)'(\tau)\| d\tau = \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau.$$

### Lemat 2.6

(a) Jeżeli  $F : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest funkcją ciągłą i różnowartościową, to dla każdego podziału  $\pi \in \Pi[\ell]$  ma miejsce nierówność

$$\mathcal{H}^1((\mathcal{L}_\pi F)([-\ell, \ell])) \leq \mathcal{H}^1(F([-\ell, \ell])).$$

(b) Jeżeli  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i wypukłą lub wklęsłą, to

$$\mathcal{H}^1(\Gamma f([-\ell, \ell])) = \vartheta(\Gamma f) = \int_{-\ell}^{\ell} \|(\Gamma f)'(\tau)\| d\tau = \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau \quad (2.6)$$

oraz

$$\Lambda(f) = \sup_{\pi \in \Pi[\ell]} \Lambda(\mathcal{L}_\pi f). \quad (2.7)$$

**Dowód punktu (a).** Przyjmijmy

$$\pi = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \in \Pi[\ell].$$

Mamy (patrz uwaga 2.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1((\mathcal{L}_\pi F)([-\ell, \ell])) &= \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (\mathcal{L}_\pi F)([\tau_k, \tau_{k+1}])\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}^1((\mathcal{L}_\pi F)([\tau_k, \tau_{k+1}])) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}^1([F(\tau_k), F(\tau_{k+1})]) = \sum_{k=0}^{n-1} \|F(\tau_k) - F(\tau_{k+1})\| \end{aligned}$$

oraz

$$\mathcal{H}^1(F([-\ell, \ell])) = \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} F([\tau_k, \tau_{k+1}])\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{H}^1(F([\tau_k, \tau_{k+1}])).$$

Wystarczy teraz wykazać, że

$$\|F(\tau_k) - F(\tau_{k+1})\| \leq \mathcal{H}^1(F([\tau_k, \tau_{k+1}])), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Nierówności te wynikają ze wspomnianego w uwadze 2.4 wniosku 2.10.12. W rozważanym przypadku można też:

(1) zauważyć, że

$$[F(\tau_k), F(\tau_{k+1})] \subset P_{[F(\tau_k), F(\tau_{k+1})]}(F([\tau_k, \tau_{k+1}])),$$

gdzie  $P_{[F(\tau_k), F(\tau_{k+1})]}$  oznacza rzut na odcinek  $[F(\tau_k), F(\tau_{k+1})]$ ;

(2) użyć twierdzenia 1, patrz [4], s 75, wykorzystując nierówność

$$\text{Lip } P_{[F(\tau_k), F(\tau_{k+1})]} \leq 1.$$

**Dowód punktu (b).** Przypuśćmy, że  $f$  jest funkcją ciągłą i wypukłą. Wtedy (patrz [20], twierdzenie 7, s 43): albo  $f$  jest funkcją monotoniczną, albo istnieje takie  $\ell^0 \in (-\ell, \ell)$ , że  $f$  jest nierosnąca w przedziale  $[-\ell, \ell^0]$  i niemalejąca w przedziale  $[\ell^0, \ell]$ . Poza tym (patrz uwaga 2.1)  $f : (\ell^-, \ell^+) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją lokalnie lipschitzowską. Wynika stąd, że  $f : [\ell^-, \ell^+] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją absolutnie ciągłą. Korzystając z uwagi 2.9 stwierdzamy słuszność równości (2.6).

Jeżeli  $f$  jest funkcją ciągłą i wklęsłą, to  $-f$  jest funkcją ciągłą i wypukłą i mamy

$$\mathcal{H}^1((\Gamma(-f))([-\ell, \ell])) = \mathcal{H}^1((\Gamma f)([-\ell, \ell])) = \vartheta(\Gamma f) = \vartheta(\Gamma(-f)),$$

więc równości (2.6) są prawdziwe również i w tym przypadku.

Dowodziemy równości (2.7). Mamy

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \mathcal{H}^1((\Gamma f)([-\ell, \ell])) = |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \vartheta(\Gamma f) \\ &= |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sup_{\pi \in \Pi[\ell]} \vartheta_\pi(\Gamma f) = \sup_{\pi \in \Pi[\ell]} \{|f(-\ell)| + |f(\ell)| + \vartheta_\pi(\Gamma f)\}, \end{aligned}$$

a dla każdego  $\pi = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \in \Pi[\ell]$

$$\begin{aligned}
& |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \vartheta_\pi(\Gamma f) \\
= & |f(-\ell)| + |f(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \|(\Gamma f)(\tau_{k+1}) - (\Gamma f)(\tau_k)\| \\
= & |(\mathcal{L}_\pi f)(-\ell)| + |(\mathcal{L}_\pi f)(\ell)| + \sum_{k=0}^{n-1} \|(\Gamma(\mathcal{L}_\pi f))(\tau_{k+1}) - (\Gamma(\mathcal{L}_\pi f))(\tau_k)\| \\
= & |(\mathcal{L}_\pi f)(-\ell)| + |(\mathcal{L}_\pi f)(\ell)| + \vartheta_\pi(\Gamma(\mathcal{L}_\pi f)) \\
= & |(\mathcal{L}_\pi f)(-\ell)| + |(\mathcal{L}_\pi f)(\ell)| + \mathcal{H}^1(\Gamma(\mathcal{L}_\pi f)([-\ell, \ell])) \\
= & \Lambda(\mathcal{L}_\pi f),
\end{aligned}$$

więc

$$\Lambda(f) = \sup_{\pi \in \Pi[\ell]} \Lambda(\mathcal{L}_\pi f).$$

### 3. Układy obronne

#### 3.1. Pary wypukłe przystosowane do obrony odcinków

Wprowadzimy pojęcie pary wypukłej będącej odpowiednikiem płaskiego, zwartego zbioru wypukłego.

**Definicja 3.1.** Niech będzie dana liczba  $\ell > 0$  i dwie funkcje  $f, g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ . Powiemy, że  $(f, g)$  jest parą wypukłą, jeżeli:

- (a)  $f \geq 0$  jest funkcją ciągłą i wklęsłą;
- (b)  $g \leq 0$  jest funkcją ciągłą i wypukłą;
- (c) spełniony jest warunek

$$g(0) < 0 < f(0).$$

Zbiór wszystkich opisanych wyżej par wypukłych oznaczmy przez  $\mathbf{W}[\ell]$ . Dla każdej pary wypukłej  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  przyjmujemy

$$\mathbf{C}(f, g) = \{(\tau, \mu) \in [-\ell, \ell] \times \mathbb{R} : g(\tau) \leq \mu \leq f(\tau)\}.$$

Jeżeli (patrz definicja 2.4)  $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ , to parę wypukłą  $(f, g)$  nazwiemy przystosowaną do obrony odcinków (równoległych do osi odciętych). Przyjmujemy wówczas

$$\Lambda(f, g) = \Lambda(f) = \Lambda(g) \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{L}(f, g) = \mathfrak{L}(f) = \mathfrak{L}(g).$$

Zbiór wszystkich par wypukłych  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  przystosowanych do obrony odcinków oznaczmy przez  $\mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ .

**Przykład 3.1.** Jeżeli para  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  spełnia warunki

$$\begin{aligned} f(-\ell) &= g(-\ell) = f(\ell) = g(\ell) = 0, \\ \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau &= \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (g'(\tau))^2} d\tau, \end{aligned}$$

to oczywiście  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ . W szczególności, jeżeli

$$\ell > 0, \quad \nu_2 \leq \nu_1 < 0 < \mu_1 \leq \mu_2$$

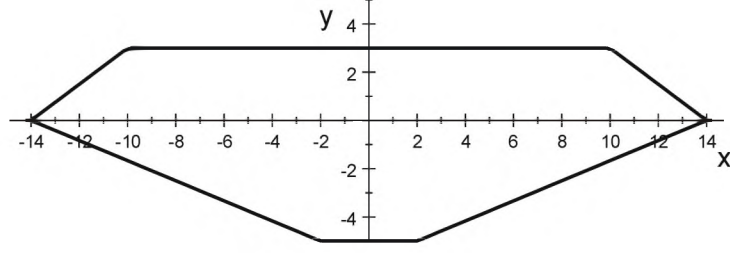
oraz

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \left( \sqrt{\ell^2 + \nu_2^2} - \ell \right) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \sqrt{\ell^2 + \mu_2^2} - \ell \right),$$

to łatwo sprawdzić, że dla funkcji  $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ , danych wzorami

$$f(\tau) = \min \left\{ \mu_1, \mu_2 - \frac{\mu_2}{\ell} |\tau| \right\}, \quad g(\tau) = \max \left\{ \nu_1, \nu_2 - \frac{\nu_2}{\ell} |\tau| \right\},$$

mamy  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ .



**Rys 3.1.** Wykresy funkcji  $f$  i  $g$  dla parametrów  
 $\ell = 14$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = \frac{21}{2}$ ,  $\nu_1 = -5$ ,  $\nu_2 = -\frac{35}{6}$ .

**Przykład 3.2.** Dla funkcji  $f$  i  $g$  z przykładu 1.2 mamy

$$(f, g) \in \mathbf{W} \left[ \frac{\pi}{2} \right],$$

$$f \left( -\frac{\pi}{2} \right) = g \left( -\frac{\pi}{2} \right) = f \left( \frac{\pi}{2} \right) = g \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

oraz

$$\mathcal{H}^1(\Gamma f) \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 \tau} d\tau = 2r \arcsin \frac{\pi}{2r},$$

$$\mathcal{H}^1(\Gamma g) \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{r^2 - \tau^2}} d\tau = 2r \arcsin \frac{\pi}{2r},$$

więc  $(f, g)$  jest parą wypukłą przystosowaną do obrony odcinków.

**Definicja 3.2.** Niech będzie  $\ell > 0$ . Powiemy, że podział  $\pi \in \Pi[\ell]$  jest odpowiedni (adekwatny) dla pary  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , jeżeli

$$(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) \in \mathbf{W}[\ell].$$

Zbiór wszystkich podziałów odpowiednich dla pary  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  oznaczymy przez  $\Pi_{\text{AD}}[f, g]$ .

### Uwagi

**3.1.** Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , to (por. [20], twierdzenie 9, s 171)  $\mathbf{C}(f, g)$  jest zwartym zbiorem wypukłym i mamy

$$\mathbf{C}(f, g) = \text{conv} \left( (\Gamma f)([-\ell, \ell]) \cup (\Gamma g)([-\ell, \ell]) \right).$$

Poza tym

$$0 \in \text{int } \mathbf{C}(f, g),$$

$$\text{bd } \mathbf{C}(f, g) = (\Gamma f)([-\ell, \ell]) \cup (\Gamma g)([-\ell, \ell])$$

$$\cup \{-\ell\} \times [g(-\ell), f(-\ell)] \cup \{\ell\} \times [g(\ell), f(\ell)]$$

oraz

$$\mathcal{H}^1(\text{bd } \mathbf{C}(f, g)) = \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

**3.2.** Ponieważ każda z funkcji  $f, g$  tworzących parę wypukłą może się zerować tylko na końcach przedziału, w którym jest określona (bo jest wklęsła lub wypukła,

a przy tym niezerowa), to każdy podział  $\pi \in \Pi[\ell]$  zawierający co najmniej trzy punkty jest odpowiedni dla każdej pary  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ .

**3.3.** Z analogicznych powodów jak wyżej każdy podział  $\pi \in \Pi[\ell]$  jest odpowiedni dla pary  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  spełniającej warunek

$$\min \{g(-\ell), g(\ell)\} < 0 < \max \{f(-\ell), f(\ell)\}.$$

**3.4.** Oczywiście dla każdego  $\varkappa > 0$  mamy

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell] \Rightarrow (\mathcal{J}_\varkappa f, \mathcal{J}_\varkappa g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\varkappa\ell].$$

Natomiast implikacja

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell] \Rightarrow (\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$$

jest na ogół fałszywa. Jest to jedna z przyczyn komplikacji użytych w pracy konstrukcji.

**Lemat 3.1.**

(a) Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , to dla każdego  $\varkappa > 0$  ma miejsce równość

$$\varkappa \mathbf{C}(f, g) = \mathbf{C}(\mathcal{J}_\varkappa f, \mathcal{J}_\varkappa g).$$

(b) Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ , to dla każdego  $\varkappa > 1$  istnieje taka para  $(f^\varkappa, g^\varkappa) \in \mathbf{W}[\ell]$  i taki podział  $\pi \in \Pi[\ell]$ , że

$$(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\varkappa\ell], \quad (3.1)$$

$$\sqrt{\varkappa} \mathfrak{L}(f, g) \leq \mathfrak{L}(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)) \leq \varkappa \mathfrak{L}(f, g) \quad (3.2)$$

oraz

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)) \subset \varkappa \mathbf{C}(f, g).$$

**Dowód.** Łatwy dowód punktu (a) pominiemy. Dość długi dowód punktu (b) podzielimy na dwie części. Obierzmy dowolnie  $\varkappa > 1$ .

**Część 1.** Para  $(f^\varkappa, g^\varkappa)$ . Korzystając z punktów (a2) i (b2) lematu **2.3** i punktu (b) lematu **2.6** stwierdzamy istnienie takich podziałów

$$\pi' = \{\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{n'}\} \in \Pi[\ell], \quad \pi'' = \{\tau''_0, \tau''_1, \dots, \tau''_{n''}\} \in \Pi[\ell],$$

że dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$

$$(\mathcal{L}_{\varkappa\pi'}(\mathcal{J}_\varkappa f))(\tau) \geq f(\tau) + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} f(0), \quad \Lambda(\mathcal{L}_{\pi'} f) \geq \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \Lambda(f, g)$$

oraz

$$(\mathcal{L}_{\varkappa\pi''}(\mathcal{J}_\varkappa g))(\tau) \leq g(\tau) + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} g(0), \quad \Lambda(\mathcal{L}_{\pi''} g) \geq \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \Lambda(f, g).$$

Dla podziału  $\pi = \pi' \cup \pi''$  mamy  $\pi' \subset \pi$  oraz  $\pi'' \subset \pi$ , więc (patrz lemat **2.1** i wniosek **2.1**)

$$\mathcal{L}_{\pi'} f = \mathcal{L}_\pi \mathcal{L}_{\pi'} f \leq \mathcal{L}_\pi f \quad \text{oraz} \quad \mathcal{L}_{\pi''} g = \mathcal{L}_\pi \mathcal{L}_{\pi''} g \geq \mathcal{L}_\pi g.$$



Stąd, dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}f))(\tau) &= (\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f))(\tau) \geq (\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi'}f))(\tau) \\ &= (\mathcal{L}_{\varkappa\pi'}(\mathcal{J}_{\varkappa}f))(\tau) \geq f(\tau) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}f(0) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}g))(\tau) &= (\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g))(\tau) \leq (\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi''}g))(\tau) \\ &= (\mathcal{L}_{\varkappa\pi''}(\mathcal{J}_{\varkappa}g))(\tau) \leq g(\tau) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}g(0). \end{aligned}$$

Z analogicznych powodów będzie również

$$\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) \geq \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\Lambda(f, g) \quad \text{oraz} \quad \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g) \geq \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\Lambda(f, g). \quad (3.3)$$

Możliwe są przypadki:

$$\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) = \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g), \quad \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) > \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g), \quad \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) < \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g).$$

W przypadkach drugim i trzecim konieczne będą wstępne modyfikacje: funkcji  $g$  w drugim przypadku, a funkcji  $f$  w trzecim. W pierwszym przypadku żadne wstępne modyfikacje potrzebne nie będą.

Rozważmy przypadek  $\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) > \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g)$ . Dla każdego  $\lambda \geq 0$  zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}\lambda g) = \Lambda(\lambda\mathcal{L}_{\pi}g) = -\lambda g(-\ell) - \lambda g(\ell) + \mathcal{H}^1((\Gamma(\lambda\mathcal{L}_{\pi}g))([- \ell, \ell])) \\ &= -\lambda g(-\ell) - \lambda g(\ell) + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\delta_k^2(\pi) + \varepsilon_k^2(g, \pi)\lambda^2}. \end{aligned}$$

Funkcja  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, ściśle rosnąca i spełnia warunki:

$$\phi(0) = 2\ell < \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g) = \phi(1) \quad \text{oraz} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) = \infty.$$

Istnieje zatem takie  $\lambda > 1$ , że

$$\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}\lambda g) = \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f).$$

Przyjmujemy:

$$f^{\varkappa} = f \quad \text{oraz} \quad g^{\varkappa} = \lambda g.$$

Ponieważ

$$\Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}) = \Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f) = \varkappa\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) = \varkappa\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}\lambda g) = \Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}\lambda g) = \Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}),$$

to

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}) &= \frac{\sigma^2\varkappa\ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}) = \frac{\sigma^2\varkappa\ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}) \\ &= \mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}) &= \frac{\sigma^2\varkappa\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f) = \varkappa\left(\frac{\sigma^2\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f)\right) \\ &\leq \varkappa\left(\frac{\sigma^2\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(f)\right) = \varkappa\mathfrak{L}(f) = \varkappa\mathfrak{L}(f,g).\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę pierwszą z nierówności (3.3), otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}) &= \varkappa\left(\frac{\sigma^2\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f)\right) \geq \varkappa\left(\frac{\sigma^2\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(f)\right) \\ &\geq \sqrt{\varkappa}\left(\frac{\sigma^2\ell}{\sigma^2-\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho\sigma}{\sigma^2-\rho^2}\Lambda(f)\right) = \sqrt{\varkappa}\mathfrak{L}(f,g).\end{aligned}$$

Zgodnie z uwagami **2.4**, **2.10** i punktem (a) lematu **2.5**, dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  mamy

$$(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}))(\tau) - f(\tau) = (\mathcal{L}_{\varkappa\pi}(\mathcal{J}_{\varkappa}f))(\tau) - f(\tau) \geq \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}f(0) > 0. \quad (3.4)$$

W szczególności

$$(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}))(0) \geq f(0) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}f(0) > 0.$$

Z analogicznych powodów, dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$ ,

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}))(\tau) - g(\tau) &= (\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}\lambda g))(\tau) - \lambda g(\tau) + (\lambda-1)g(\tau) \\ &\leq \lambda\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}g(0) + (\lambda-1)g(\tau) \leq \lambda\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}g(0) < 0,\end{aligned} \quad (3.5)$$

a w szczególności

$$(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}))(0) \leq g(0) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}g(0) < 0.$$

Tym sposobem dowiedliśmy, że para  $(f^{\varkappa}, g^{\varkappa})$  spełnia warunki (3.1), (3.2), (3.4) i (3.5)

W przypadku  $\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) < \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g)$  znajdujemy takie  $\lambda > 1$ , że

$$\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}\lambda f) = \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g).$$

Przyjmujemy

$$f^{\varkappa} = \lambda f \quad \text{oraz} \quad g^{\varkappa} = g$$

i tym samym sposobem jak w poprzednim przypadku stwierdzamy, że para  $(f^{\varkappa}, g^{\varkappa})$  też spełnia wymienione wyżej cztery warunki.

W przypadku  $\Lambda(\mathcal{L}_{\pi}f) = \Lambda(\mathcal{L}_{\pi}g)$  przyjmujemy po prostu

$$f^{\varkappa} = f \quad \text{oraz} \quad g^{\varkappa} = g,$$

otrzymując parę  $(f^{\varkappa}, g^{\varkappa})$  spełniającą warunki (3.1), (3.2), (3.4) i (3.5)

**Część 2.** Dowód inkluzji

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \subset \varkappa\mathbf{C}(f, g).$$

Inkluzja

$$\text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \subset \varkappa\mathbf{C}(f, g)$$

jest oczywista. Inkluzja

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}))$$

wynika z warunków (3.4) i (3.5). Wystarczy zatem wykazać, że

$$\mathbf{C}(f, g) \cap \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) = \emptyset.$$

Gdyby było

$$(\tau, \mu) \in \mathbf{C}(f, g) \cap \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})),$$

to byłoby również

$$(\tau, \mu) \in \mathbf{C}(f, g),$$

a wobec tego mielibyśmy

$$-\ell \leq \tau \leq \ell \text{ oraz } g(\tau) \leq \mu \leq f(\tau).$$

Ponieważ ma też miejsce relacja

$$(\tau, \mu) \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})),$$

to z warunków (3.4) i (3.5) wynika, że

$$\mu = \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa})(\tau) > f(\tau) \quad \text{lub} \quad \mu = \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})(\tau) < g(\tau).$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód inkluzji

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})).$$

**Przykład 3.3.** Obierzmy dowolne  $\ell > 0$ , dowolne  $\varkappa > 1$  i przyjmijmy

$$f(\tau) = \sqrt{\ell^2 - \tau^2}, \quad g(\tau) = -\sqrt{\ell^2 - \tau^2}, \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

Następnie, dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , zdefiniujmy

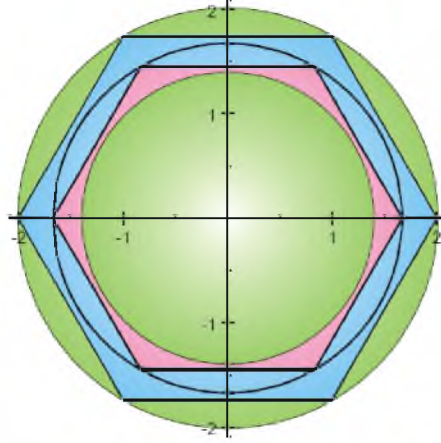
$$\pi_n = \left\{ -\ell \cos \frac{k\pi}{n} \right\}_{k=0}^n.$$

Jeżeli

$$n > \frac{\pi}{2 \arccos \frac{1}{\varkappa}},$$

to  $(\mathcal{L}_{\pi_n}f, \mathcal{L}_{\pi_n}g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\varkappa\ell]$  oraz

$$\frac{1}{\varkappa}\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi_n}f, \mathcal{L}_{\pi_n}g) \subset \mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi_n}f), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi_n}g)) \subset \varkappa\mathbf{C}(f, g).$$



**Rys. 3.2.** Przypadek  $\ell = \frac{5}{3}$ ,  $\varkappa = \frac{6}{5}$ ,  $n = 3$ .

### 3.2. Układy obronne

Zacznijmy od wprowadzenia numeracji "wierzchołków" wielokąta wypukłego, postaci

$$\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g),$$

zgodnej z dodatnią orientacją płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ . Numeracja ta będzie szczególnie przydatna w szóstym rozdziale.

**Konstrukcja 3.1.** Niech będzie dana para  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  i podział

$$\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g].$$

**Etap 1.** Wierzchołki. Zbiór  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$  jest wielokątem wypukłym. W oznaczeniach z konstrukcji 2.2 mamy

$$\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) = \text{conv} \bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(f, \pi), d_k(g, \pi)\}$$

oraz

$$\bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(f, \pi), d_k(g, \pi)\} \subset \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Symbolami  $k^-(g, \pi)$ ,  $k^+(f, \pi)$  oznaczmy liczby elementów zbiorów, odpowiednio

$$\bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(g, \pi)\} \quad \text{oraz} \quad \left( \bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(f, \pi)\} \right) \setminus \{(\ell, 0)\}$$

i przyjmujemy

$$\mathbf{n}^-(f, g, \pi) = k^-(g, \pi) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{n}(f, g, \pi) = k^-(g, \pi) + k^+(f, \pi) - 1.$$

Zauważmy, że

$$k^-(g, \pi) = \begin{cases} n+3, & \text{gdy } g(-\ell) < 0 \text{ i } g(\ell) < 0, \\ n+2, & \text{gdy } g(-\ell) < 0 \text{ i } g(\ell) = 0, \\ n+2, & \text{gdy } g(-\ell) = 0 \text{ i } g(\ell) < 0, \\ n+1, & \text{gdy } g(-\ell) = g(\ell) = 0. \end{cases}$$

Natomiast

$$k^+(f, \pi) = \begin{cases} n+2, & \text{gdy } f(-\ell) > 0 \text{ i } f(\ell) > 0, \\ n+1, & \text{gdy } f(-\ell) > 0 \text{ i } f(\ell) = 0, \\ n+1, & \text{gdy } f(-\ell) = 0 \text{ i } f(\ell) > 0, \\ n, & \text{gdy } f(-\ell) = f(\ell) = 0. \end{cases}$$

**Etap 2.** Numeracja wierzchołków. Ponumerujemy najpierw wierzchołki "dolne". Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, k^-(g, \pi) - 1$  przyjmujemy

$$d_k^\odot(f, g, \pi) = \begin{cases} d_k(g, \pi) & \text{gdy } g(-\ell) < 0, \\ d_{k+1}(g, \pi) & \text{gdy } g(-\ell) = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\{d_k^\odot(f, g, \pi)\}_{k=0}^{k^-(g, \pi)-1}$  jest ciągiem różnowartościowym i mają miejsce relacje

$$d_0^\odot(f, g, \pi) = (-\ell, 0), \quad d_{k^-(g, \pi)-1}^\odot(f, g, \pi) = (\ell, 0),$$

$$\bigcup_{k=0}^{k^-(g, \pi)-1} \{d_k^\odot(f, g, \pi)\} = \bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(g, \pi)\}.$$

Teraz ponumerujemy wierzchołki "górne". Dla każdego  $k = 0, 1, \dots, k^+(f, \pi) - 1$  przyjmujemy najpierw (numeracja pomocnicza)

$$d_k^\odot(f, \pi) = \begin{cases} d_k(f, \pi) & \text{gdy } f(-\ell) > 0, \\ d_{k+1}(f, \pi) & \text{gdy } f(-\ell) = 0, \end{cases}$$

a następnie, dla każdego  $k = k^-(g, \pi), k^-(g, \pi) + 1, \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi)$  przyjmujemy

$$d_k^\odot(f, g, \pi) = d_{\mathbf{n}(f, g, \pi)-k}^\odot(f, \pi).$$

Zauważmy, że  $\{d_k^\odot(f, g, \pi)\}_{k=k^-(g, \pi)}^{\mathbf{n}(f, g, \pi)}$  jest ciągiem różnowartościowym i mają miejsce relacje

$$d_{\mathbf{n}(f, g, \pi)}^\odot(f, g, \pi) = d_0^\odot(f, \pi) = (-\ell, 0),$$

$$\bigcup_{k=k^-(g, \pi)}^{\mathbf{n}(f, g, \pi)} \{d_k^\odot(f, g, \pi)\} = \left( \bigcup_{k=0}^{n+2} \{d_k(f, \pi)\} \right) \setminus \{(\ell, 0)\}.$$

Poza tym  $\{d_k^\odot(f, g, \pi)\}_{k=0}^{\mathbf{n}(f, g, \pi)-1}$  jest ciągiem różnowartościowym i mamy

$$d_{\mathbf{n}(f, g, \pi)}^\odot(f, g, \pi) = d_0^\odot(f, g, \pi) = (-\ell, 0),$$

$$\bigcup_{k=0}^{\mathbf{n}(f, g, \pi)-1} \{d_k^\odot(f, g, \pi)\} \subset \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g),$$

$$\text{conv} \bigcup_{k=0}^{\mathbf{n}(f,g,\pi)-1} \{d_k^\circ(f, g, \pi)\} = \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

**Etap 3.** Orientacja brzegu wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Mówimy, że  $\{c_k\}_{k=0}^\infty$  jest ciągiem o okresie  $\theta \in \mathbb{N}$ , jeżeli spełnia warunek

$$c_{k+\theta} = c_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Standardowym sposobem przedłużamy numerację z etapu **2** na cały zbiór  $\mathbb{N}_0$  tak, by otrzymać nieskończony ciąg

$$\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$$

o okresie  $\mathbf{n}(f, g, \pi)$ . Ciąg  $\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$  nazwiemy orientacją brzegu wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ .

**Etap 4.** Własności. Nadużywamy znaczenia pojęcia "wierzchołek", bo nie każdy punkt  $d_k^\circ(f, g, \pi)$  musi być punktem ekstremalnym wielokąta wypukłego  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Dla każdego  $j \in \mathbb{N}_0$  mamy jednak

$$\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) = \text{conv} \bigcup_{k=j}^{j+\mathbf{n}(f,g,\pi)-1} \{d_k^\circ(f, g, \pi)\}$$

oraz

$$\bigcup_{k=j}^{j+\mathbf{n}(f,g,\pi)-1} \{d_k^\circ(f, g, \pi)\} \subset \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g),$$

a poza tym

$$\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=j}^{j+\mathbf{n}(f,g,\pi)-1}$$

jest ciągiem różnowartościowym. Zauważmy jeszcze, że

$$0 \in \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g),$$

$$\mathbf{n}^-(f, g, \pi) \geq 3 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{n}(f, g, \pi) \geq 4.$$

**Przykład 3.4.** Dla funkcji  $f, g$  z przykładu **2.2** i podziału  $\pi = \{-2, 2\}$  mamy

$$\mathbf{n}^-(f, g, \pi) = k^-(g, \pi) = 4, \quad k^+(f, \pi) = 3, \quad \mathbf{n}(f, g, \pi) = 6,$$

$$\begin{aligned} \{d_0^\circ(g, \pi), d_1^\circ(g, \pi), d_2^\circ(g, \pi), d_3^\circ(g, \pi)\} &= \{(-2, 0), (-2, -3), (2, -3), (2, 0)\}, \\ \{d_0^\circ(f, \pi), d_1^\circ(f, \pi), d_2^\circ(f, \pi)\} &= \{(-2, 0), (-2, 1), (2, 4)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{d_0^\circ(f, g, \pi), d_1^\circ(f, g, \pi), d_2^\circ(f, g, \pi), d_3^\circ(f, g, \pi), d_4^\circ(f, g, \pi), d_5^\circ(f, g, \pi), d_6^\circ(f, g, \pi)\} \\ = \{(-2, 0), (-2, -3), (2, -3), (2, 0), (2, 4), (-2, 1), (-2, 0)\}. \end{aligned}$$

**Uwaga 3.5.** Śledząc konstrukcje odwzorowań  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{O}$  i  $\mathcal{S}_\pi^\mathbf{N}$  łatwo sprawdzić, że orientację  $\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$  można przenieść na analogiczne orientacje

$$\{d_k^{\mathbf{O}^\circ}(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty, \quad \{d_k^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$$

brzegu wielokątów  $\mathbf{C}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g)$  i  $\mathbf{C}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g)$ . Będzie przy tym

$$\begin{aligned} d_k^{\mathbf{O}\circ}(f, g, \pi) &\in \mathcal{L}^{\mathbf{O}}[g, \pi], \quad d_k^{\mathbf{N}\circ}(f, g, \pi) \in \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[g, \pi], \quad \text{gdy } k \in \{0, \dots, \mathbf{n}^-(f, g, \pi) - 1\}, \\ d_k^{\mathbf{O}\circ}(f, g, \pi) &\in \mathcal{L}^{\mathbf{O}}[f, \pi], \quad d_k^{\mathbf{N}\circ}(f, g, \pi) \in \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi], \quad \text{gdy } k \in \{\mathbf{n}^-(f, g, \pi), \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi)\}. \end{aligned}$$

Rozważana w pracy obrona odcinka polega w gruncie rzeczy na obronie pewnego zbioru wypukłego zawierającego ten odcinek. W związku z tym wprowadzimy następną definicję.

**Definicja 3.3.** Powiemy, że  $(\Omega_{\mathbf{O}}, \Omega_{\mathbf{N}}, F)$  jest układem obronnym ze strefą rażenia  $D$ , jeżeli:

(a)  $\Omega_{\mathbf{O}}, \Omega_{\mathbf{N}}, D$  są zwartymi i wypukłymi podzbiorami płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  oraz

$$0 \in \text{int } D;$$

(b)  $F : \text{bd } \Omega_{\mathbf{N}} \rightarrow \Omega_{\mathbf{O}}$  i dla każdego  $t_* \geq 0$  i każdej lipschitzowskiej funkcji

$$\eta : [t_*, \infty) \rightarrow \text{bd } \Omega_{\mathbf{N}}$$

mamy

$$\text{Lip } (F \circ \eta) \leq \frac{\rho}{\sigma} \text{Lip } \eta \quad \text{oraz} \quad \eta(t) \in (F \circ \eta)(t) + D, \quad t \geq t_*.$$

**Przykład 3.5.** Ustalmy dowolnie  $r > 0$  i przyjmijmy

$$\Lambda_r = \frac{\sigma^2 r}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{\rho \sigma r}{\sigma^2 - \rho^2} \frac{\pi}{2}.$$

Następnie, dla każdego  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , zdefiniujmy

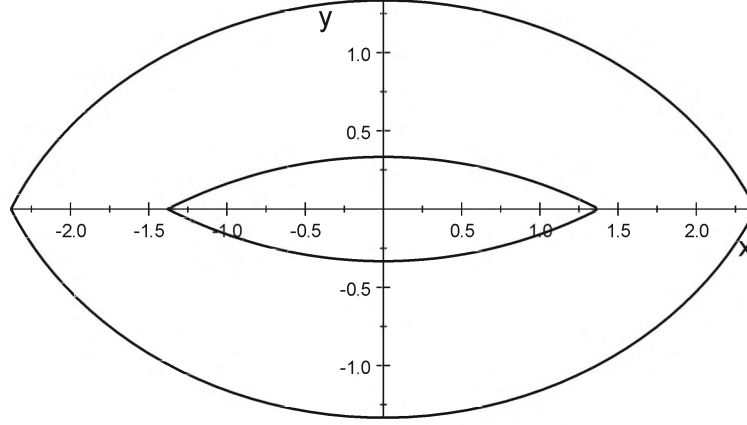
$$\begin{aligned} \eta(\alpha) &= \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) \\ \eta_2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda_r \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2 r}{\sigma^2 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 - \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + \frac{\rho \sigma r}{\sigma^2 - \rho^2} \begin{bmatrix} \pi - |\pi - \alpha| \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \xi(\alpha) &= \eta(\alpha) - r \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przyjmując

$$\Omega_{\mathbf{N}} = \text{conv } \eta([0, 2\pi)), \quad \Omega_{\mathbf{O}} = \text{conv } \xi([0, 2\pi)), \quad F = \xi \circ \eta^{-1}$$

i korzystając z lematów **3.1** i **3.3** podanych w pracy [12] (gdzie  $\theta = \frac{\sigma}{\rho}$ ) stwierdzamy, że  $(\Omega_{\mathbf{O}}, \Omega_{\mathbf{N}}, F)$  jest układem obronnym ze strefą rażenia

$$D = B[0, r].$$



**Rys. 3.3.** Układ obronny  $(\Omega_{\mathbf{O}}, \Omega_{\mathbf{N}}, F)$   
dla parametrów  $r = \rho = 1$ ,  $\sigma = 2$ .

**Definicja 3.4.** Jeżeli  $(f, g) \in W[\ell]$ ,  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[\ell]$  i  $(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ , to (patrz konstrukcja 2.2) przyjmujemy

$$\ell^{\mathbf{N}}(f, g, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \ell^{\mathbf{N}}(g, \pi)$$

i dla każdego  $\eta \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g)$  definiujemy

$$F_{(f, g, \pi)}(\eta) = \begin{cases} F_{(f, \pi)}(\eta), & \text{gdy } \eta \in \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi], \\ F_{(g, \pi)}(\eta), & \text{gdy } \eta \in \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[g, \pi]. \end{cases}$$

Poprawność definicji liczby  $\ell^{\mathbf{N}}(f, g, \pi)$  jest konsekwencją uwagi 2.7.

**Lemat 3.2.** Jeżeli  $(f, g) \in W[\ell]$ ,  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[-\ell, \ell]$  i  $(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ , to

$$\ell^{\mathbf{N}}(f, \pi) = \ell^{\mathbf{N}}(g, \pi)$$

i trójka

$$\left( \mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}}g), \mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g), F_{(f, g, \pi)} \right)$$

jest układem obronnym ze strefą rażenia  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g)$ .

**Dowód.** Wszystkie trzy zbiory  $\mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}}g)$ ,  $\mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g)$ ,  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g)$  są zwarte i wypukłe oraz

$$0 \in \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g),$$

więc pierwszy warunek definicji 3.3 jest spełniony.

Upraszczając oznaczenie, przyjmijmy

$$\ell^{\mathbf{N}} = \ell^{\mathbf{N}}(f, g, \pi).$$

Ponieważ (patrz konstrukcja 2.2)

$$\text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g) = \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] \cup \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[g, \pi], \quad \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[f, \pi] \cap \mathcal{L}^{\mathbf{N}}[g, \pi] = \{(-\ell^{\mathbf{N}}, 0), (\ell^{\mathbf{N}}, 0)\}$$

oraz

$$(\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f)(-\ell^{\mathbf{N}}) = (\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g)(-\ell^{\mathbf{N}}), \quad (\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}f)(\ell^{\mathbf{N}}) = (\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}}g)(\ell^{\mathbf{N}}),$$



to definicja odwzorowania  $F_{(f,g,\pi)}$  jest poprawna i

$$F_{(f,g,\pi)} : \text{bd } \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right) \rightarrow \mathcal{L}^{\mathbf{O}} [f, \pi] \cup \mathcal{L}^{\mathbf{O}} [g, \pi] \subset \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g \right)$$

jest funkcją ciągłą.

Ustalmy teraz dowolne  $t_* \geq 0$  i dowolną lipschitzowską funkcję

$$\eta : [t_*, \infty) \rightarrow \text{bd } \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right).$$

Upraszczając kolejne oznaczenie, przyjmijmy

$$F_{(f,g,\pi)} = F.$$

Wybierając dowolne  $s, t \geq t_*$  dowiedzimy nierówności

$$\|(F \circ \eta)(s) - (F \circ \eta)(t)\| \leq \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) |s - t|.$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że  $s < t$  oraz (patrz uwaga **3.5**)

$$\eta(s) \in [d_j^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), d_{j+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)], \quad \eta(t) \in [d_k^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), d_{k+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)],$$

gdzie

$$j \leq k < j + \mathbf{n}(f, g, \pi).$$

Jeżeli  $j = k$ , to (patrz lemat **2.5**)

$$\|(F \circ \eta)(s) - (F \circ \eta)(t)\| \leq \frac{\rho}{\sigma} \|\eta(s) - \eta(t)\| \leq \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) |s - t|.$$

Założmy zatem, że  $j < k$ . Funkcja  $\eta$  jest ciągła, a każda z sum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= [\eta(s), d_{j+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)] \cup \bigcup_{i=j+1}^{k-1} [d_i^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), d_{i+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)] \\ &\quad \cup [d_k^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), \eta(t)], \\ \mathcal{L}_2 &= [\eta(t), d_{k+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)] \cup \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}(f,g,\pi)-(k-j+1)} [d_{k+i}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), d_{k+i+1}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi)] \\ &\quad \cup [d_{j+\mathbf{n}(f,g,\pi)}^{\mathbf{N}^\circ}(f, g, \pi), \eta(s)] \end{aligned}$$

jest zbiorem spójnym i spełnione są warunki:

$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \text{bd } \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right), \quad \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\eta(s), \eta(t)\}.$$

Zatem

$$\mathcal{L}_1 \subset \eta([s, t]) \quad \text{lub} \quad \mathcal{L}_2 \subset \eta([s, t]).$$

Rozważmy pierwszą możliwość. W przypadku  $\mathcal{L}_2 \subset \eta([s, t])$  rozumowanie jest podobne. Z tych samych powodów jak wyżej istnieją takie

$$s \leq t_{j+1} < t_{j+2} < \dots < t_k \leq t,$$

że

$$\eta(t_i) = d_i^{\mathbf{N}^\odot}(f, g, \pi), \quad i = j+1, j+2, \dots, k.$$

Korzystając ponownie z lematu **2.5**, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \| (F \circ \eta)(s) - (F \circ \eta)(t) \| \\ & \leq \| (F \circ \eta)(s) - (F \circ \eta)(t_{j+1}) \| + \sum_{i=j+1}^{k-1} \| (F \circ \eta)(t_i) - (F \circ \eta)(t_{i+1}) \| \\ & \quad + \| (F \circ \eta)(t_k) - (F \circ \eta)(t) \| \\ & \leq \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) |s - t_{j+1}| + \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) \sum_{i=j+1}^{k-1} |t_i - t_{i+1}| + \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) |t_k - t| \\ & = \frac{\rho}{\sigma} (\text{Lip } \eta) |s - t|. \end{aligned}$$

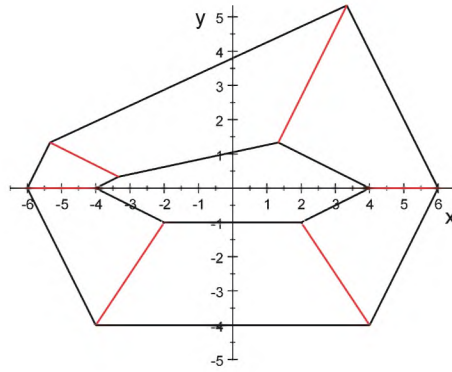
**Uwaga 3.6.** Przy założeniach lematu **3.2** odwzorowanie  $F$  nie może spełniać warunku Lipschitza ze stałą  $\frac{\rho}{\sigma}$ . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \text{Lip } F & \geq \frac{\|F(-\ell^{\mathbf{N}}, 0) - F(\ell^{\mathbf{N}}, 0)\|}{\|(-\ell^{\mathbf{N}}, 0) - (\ell^{\mathbf{N}}, 0)\|} = \frac{\|(-\ell^{\mathbf{O}}, 0) - (\ell^{\mathbf{O}}, 0)\|}{\|(-\ell^{\mathbf{N}}, 0) - (\ell^{\mathbf{N}}, 0)\|} = \frac{\ell^{\mathbf{O}}}{\ell^{\mathbf{N}}} \\ & = \frac{\rho \, 2\rho\ell + \sigma\Lambda(\mathcal{L}_\pi f)}{\sigma \, 2\sigma\ell + \rho\Lambda(\mathcal{L}_\pi f)} > \frac{\rho}{\sigma}. \end{aligned}$$

**Przykład 3.6.** Dla funkcji  $f, g$  z przykładu **2.2** i podziału  $\pi = \{-2, 2\}$  mamy

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[2] \quad \text{oraz} \quad \pi \in \Pi_{\text{AD}}[2],$$

więc  $(\mathbf{C}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g), \mathbf{C}(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g), F_{(f,g,\pi)})$  jest układem obronnym ze strefą rażenia  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) = \mathbf{C}(f, g)$ .



**Rys. 3.4.** Układ obronny dla pary  $(f, g)$  z przykładu **2.2**.

**Przykład 3.7.** Załóżmy, że funkcje

$$f(\tau) = \min \left\{ \mu_1, \mu_2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{\mu_2} \right) \right\}, \quad g(\tau) = \max \left\{ \nu_1, \nu_2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{\nu_2} \right) \right\}, \quad \tau \in [-\ell, \ell],$$

spełniają warunki z przykładu **3.1** i przyjmijmy

$$\begin{aligned} \ell^{\mathbf{O}} &= \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \ell + \sqrt{\left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \ell \right)^2 + \mu_1^2} \right), \\ \ell^{\mathbf{N}} &= \ell^{\mathbf{O}} + \ell = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \ell + \sqrt{\left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \ell \right)^2 + \mu_1^2} \right). \end{aligned}$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned} \ell^{\mathbf{O}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \right) \ell + \sqrt{\left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \ell \right)^2 + \nu_1^2} \right), \\ \mathfrak{L}(f, g) &= \ell^{\mathbf{N}}. \end{aligned}$$

Przyjmując następnie

$$\begin{aligned} \pi^+ &= \left\{ -\ell, -\left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \ell, \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \ell, \ell \right\}, \quad \text{gdy } \mu_1 < \mu_2, \\ \pi^+ &= \left\{ -\ell, 0, \ell \right\}, \quad \text{gdy } \mu_1 = \mu_2, \end{aligned}$$

otrzymamy (patrz konstrukcja **2.1**)

$$(S_{\pi^+}^{\mathbf{O}} f)(\tau) = \min \left\{ \mu_1^{\mathbf{O}}, \mu_2^{\mathbf{O}} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\ell^{\mathbf{O}}} \right) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

gdzie

$$\mu_1^{\mathbf{O}} = \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \mu_1, \quad \mu_2^{\mathbf{O}} = \frac{\rho\mu_2}{\rho\ell + \sigma\sqrt{\ell^2 + \mu_2^2}} \ell^{\mathbf{O}},$$

oraz

$$(S_{\pi^+}^{\mathbf{N}} f)(\tau) = \min \left\{ \mu_1^{\mathbf{N}}, \mu_2^{\mathbf{N}} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\ell^{\mathbf{N}}} \right) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}],$$

gdzie

$$\mu_1^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \mu_1, \quad \mu_2^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma\mu_2}{\sigma\ell + \rho\sqrt{\ell^2 + \mu_2^2}} \ell^{\mathbf{N}}.$$

Podobnie, przyjmując

$$\begin{aligned} \pi^- &= \left\{ -\ell, -\left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \right) \ell, \left( 1 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \right) \ell, \ell \right\}, \quad \text{gdy } \nu_1 < \nu_2, \\ \pi^- &= \left\{ -\ell, 0, \ell \right\}, \quad \text{gdy } \nu_1 = \nu_2, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(S_{\pi^-}^{\mathbf{O}} g)(\tau) = \max \left\{ \nu_1^{\mathbf{O}}, \nu_2^{\mathbf{O}} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\ell^{\mathbf{O}}} \right) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

gdzie

$$\nu_1^{\mathbf{O}} = \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \nu_1, \quad \nu_2^{\mathbf{O}} = \frac{\rho \nu_2}{\rho \ell + \sigma \sqrt{\ell^2 + \nu_2^2}} \ell^{\mathbf{O}},$$

oraz

$$\left( S_{\pi}^{\mathbf{N}} g \right) (\tau) = \max \left\{ \nu_1^{\mathbf{N}}, \nu_2^{\mathbf{N}} \left( 1 - \frac{|\tau|}{\ell^{\mathbf{N}}} \right) \right\}, \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}],$$

gdzie

$$\nu_1^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \nu_1, \quad \nu_2^{\mathbf{N}} = \frac{\sigma \nu_2}{\sigma \ell + \rho \sqrt{\ell^2 + \nu_2^2}} \ell^{\mathbf{N}}.$$

Ponieważ

$$\pi = \pi \cup \pi^- \in \Pi_{\mathbf{AD}} [f, g]$$

oraz

$$\mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} f = \mathcal{S}_{\pi^+}^{\mathbf{O}} f, \quad \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} f = \mathcal{S}_{\pi^+}^{\mathbf{N}} f, \quad \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} g = \mathcal{S}_{\pi^-}^{\mathbf{O}} g, \quad \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} g = \mathcal{S}_{\pi^-}^{\mathbf{N}} g,$$

to zgodnie z lematem **3.2** trójka

$$\left( \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} g \right), \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} g \right), F_{(f, g\pi)} \right)$$

jest układem obronnym ze strefą rażenia  $\mathbf{C}(f, g)$ . Przyjmijmy teraz (patrz rys. **3.1**)

$$\ell = 14, \quad \mu_1 = 3, \quad \mu_2 = \frac{21}{2}, \quad \nu_1 = -5, \quad \nu_2 = -\frac{35}{6}.$$

Zilustrujemy wpływ proporcji  $\frac{\sigma}{\rho}$  na kształt układu obronnego i długość bronionego odcinka. Rozważymy dwa układy parametrów:

$$\rho = 1, \quad \sigma = 3 \quad \text{oraz} \quad \rho = 1, \quad \sigma = \frac{5}{4}.$$

Przypadek  $\rho = 1, \sigma = 3$ . Mamy

$$\ell^{\mathbf{O}} = \frac{59}{8}, \quad \ell^{\mathbf{N}} = \frac{171}{8},$$

$$\mu_1^{\mathbf{O}} = \frac{3}{8}, \quad \mu_2^{\mathbf{O}} = \frac{177}{152}, \quad \mu_1^{\mathbf{N}} = \frac{27}{8}, \quad \mu_2^{\mathbf{N}} = \frac{1539}{136},$$

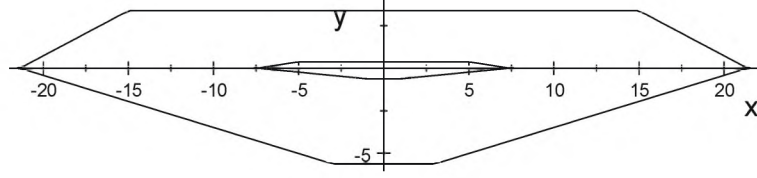
$$\left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} f \right) (\tau) = \min \left( \frac{3}{8}, \frac{177}{152} - \frac{3}{19} |\tau| \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

$$\left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} f \right) (\tau) = \min \left( \frac{27}{8}, \frac{1539}{136} - \frac{9}{17} |\tau| \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}],$$

$$\nu_1^{\mathbf{O}} = -\frac{5}{8}, \quad \nu_2^{\mathbf{O}} = -\frac{45}{8}, \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = -\frac{295}{408}, \quad \nu_2^{\mathbf{N}} = -\frac{2565}{392},$$

$$\left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{O}} g \right) (\tau) = \max \left( -\frac{5}{8}, \frac{5}{51} |\tau| - \frac{295}{408} \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

$$\left( \mathcal{S}_{\pi}^{\mathbf{N}} g \right) (\tau) = \max \left( -\frac{45}{8}, \frac{45}{147} |\tau| - \frac{2565}{392} \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}].$$



**Rys. 3.5.** Para zbiorów  $\left( \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g \right), \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right) \right)$   
dla  $\rho = 1$ ,  $\sigma = 3$ .

Przypadek  $\rho = 1$ ,  $\sigma = \frac{5}{4}$ . Mamy

$$\ell^{\mathbf{O}} = \frac{524}{9}, \quad \ell^{\mathbf{N}} = \frac{650}{9},$$

$$\mu_1^{\mathbf{O}} = \frac{16}{3}, \quad \mu_2^{\mathbf{O}} = \frac{2096}{123}, \quad \mu_1^{\mathbf{N}} = \frac{25}{3}, \quad \mu_2^{\mathbf{N}} = \frac{325}{12},$$

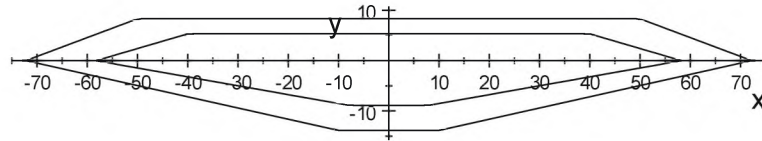
$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f \right) (\tau) = \min \left( \frac{16}{3}, \frac{2096}{123} - \frac{12}{41} |\tau| \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f \right) (\tau) = \min \left( \frac{25}{3}, \frac{325}{12} - \frac{3}{8} |\tau| \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}].$$

$$\nu_1^{\mathbf{O}} = -\frac{80}{9}, \quad \nu_2^{\mathbf{O}} = -\frac{10480}{1017}, \quad \nu_1^{\mathbf{N}} = -\frac{125}{9}, \quad \nu_2^{\mathbf{N}} = -\frac{8125}{504},$$

$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g \right) (\tau) = \max \left( -\frac{80}{9}, \frac{20}{113} |\tau| - \frac{10480}{1017} \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{O}}, \ell^{\mathbf{O}}],$$

$$\left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right) (\tau) = \max \left( -\frac{125}{9}, \frac{25}{112} |\tau| - \frac{8125}{504} \right), \quad \tau \in [-\ell^{\mathbf{N}}, \ell^{\mathbf{N}}].$$



**Rys. 3.6.** Para zbiorów  $\left( \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g \right), \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right) \right)$   
dla  $\rho = 1$ ,  $\sigma = \frac{5}{4}$ .

W szóstym rozdziale, mówiąc bardzo nieprecyzyjnie, będziemy potrzebowali oszacowania czegoś w rodzaju stopnia zakrzywienia brzegu wielokąta.

**Definicja 3.5.** Załóżmy, że  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  oraz  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[\ell]$ . Przyjmiemy

$$\mathbf{c}_0(f, g, \pi) = \delta_{\min}(\pi) \min \{ (\mathcal{L}_\pi f)(0), |(\mathcal{L}_\pi g)(0)| \},$$

a jeżeli spełniony jest warunek:

$$(W) \max \{f(-\ell), |g(-\ell)|, f(\ell), |g(\ell)|\} > 0,$$

to przyjmujemy jeszcze

$$\mathfrak{h}(f, g, \pi) = \ell \min \{\{f(-\ell), |g(-\ell)|, f(\ell), |g(\ell)|\} \setminus \{0\}\}.$$

Następnie, jeżeli warunek (W) jest spełniony, to definiujemy

$$\mathbf{c}(f, g, \pi) = \min \{\mathbf{c}_0(f, g, \pi), \mathfrak{h}(f, g, \pi)\},$$

a w przeciwnym wypadku przyjmujemy

$$\mathbf{c}(f, g, \pi) = \mathbf{c}_0(f, g, \pi).$$

**Uwaga 3.7.** Liczba  $\mathfrak{h}(f, g, \pi)$  jest najmniejszą spośród tych liczb

$$\ell f(-\ell), \ell |g(-\ell)|, \ell f(\ell), \ell |g(\ell)|,$$

które są różne od zera (o ile takie są).

**Lemat 3.3.** Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  oraz

$$\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi_{\mathbf{AD}}[\ell],$$

to (patrz konstrukcja 3.1) dla każdego  $k = 0, 1, \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi) - 1$  i każdego  $z \in [d_k^\circ(f, g, \pi), d_{k+1}^\circ(f, g, \pi)]$  mamy

$$\langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle \geq \mathbf{c}(f, g, \pi).$$

**Dowód.** Obierzmy dowolnie  $k \in \{0, 1, \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi) - 1\}$  oraz  $z \in [d_k^\circ(f, g, \pi), d_{k+1}^\circ(f, g, \pi)]$  i przyjmijmy

$$w = (w_1, w_2) = d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi).$$

Możliwe są dwa przypadki:

$$w_1 \neq 0 \text{ oraz } w_1 = 0.$$

Przypadek  $w_1 \neq 0$ . W tym przypadku możliwe są kolejne dwa przypadki:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad w_1 &= \tau_{k'+1} - \tau_{k'} > 0, \quad w_2 = g(\tau_{k'+1}) - g(\tau_{k'}), \\ \text{(b)} \quad w_1 &= \tau_{k'} - \tau_{k'+1} < 0, \quad w_2 = f(\tau_{k'}) - f(\tau_{k'+1}), \end{aligned}$$

gdzie  $k' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Rozważymy przypadek (a). W przypadku (b) rozumowanie jest podobne. Dla pewnego  $\tau \in [\tau_{k'}, \tau_{k'+1}]$  mamy

$$z = (\tau, (\mathcal{L}_\pi g)(\tau)),$$

więc

$$\begin{aligned} \langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle &= \langle Lz, w \rangle = -w_1 (\mathcal{L}_\pi g)(\tau) + w_2 \tau \\ &= -(\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) (\mathcal{L}_\pi g)(\tau) + (g(\tau_{k'+1}) - g(\tau_{k'})) \tau. \end{aligned}$$

Dla każdego  $t \in [-\ell, \ell]$  zdefiniujmy

$$h(t) = g(\tau_{k'}) + \frac{t - \tau_{k'}}{\tau_{k'+1} - \tau_{k'}} (g(\tau_{k'+1}) - g(\tau_{k'})).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\pi g)(t) &= h(t), \quad \text{gdy } t \in [\tau_{k'}, \tau_{k'+1}], \\ (\mathcal{L}_\pi g)(t) &\geq h(t), \quad \text{gdy } t \in [-\ell, \ell] \setminus (\tau_{k'}, \tau_{k'+1}), \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} &\langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle \\ &= -(\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) h(\tau) + (g(\tau_{k'+1}) - g(\tau_{k'})) \tau \\ &= (\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) \left( -g(\tau_{k'}) + \left( \frac{\tau}{\tau_{k'+1} - \tau_{k'}} - \frac{\tau - \tau_{k'}}{\tau_{k'+1} - \tau_{k'}} \right) (g(\tau_{k'+1}) - g(\tau_{k'})) \right) \\ &= (\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) (-h(0)) \geq (\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) (-\mathcal{L}_\pi g(0)) \\ &= (\tau_{k'+1} - \tau_{k'}) |(\mathcal{L}_\pi g)(0)| \geq \mathbf{c}_0(f, g, \pi) \geq \mathbf{c}(f, g, \pi). \end{aligned}$$

Przypadek  $w_1 = 0$ . W tym przypadku druga współrzędna wektora  $w$  może mieć jedną z dwóch postaci:

$$w_2 = g(-\ell) \quad \text{lub} \quad w_2 = -g(\ell),$$

a wektor  $z = (z_1, z_2)$  może być równy, odpowiednio:

$$z = (-\ell, \mu), \quad \text{gdzie } g(-\ell) \leq \mu \leq 0 \quad \text{lub} \quad z = (\ell, \mu), \quad \text{gdzie } g(\ell) \leq \mu \leq 0.$$

Ponieważ

$$\langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle = \langle Lz, w \rangle = -z_2 w_1 + z_1 w_2 = z_1 w_2,$$

to

$$\langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle = \begin{cases} -\ell g(-\ell), & \text{gdy } w_2 = g(-\ell), \\ -\ell g(\ell), & \text{gdy } w_2 = -g(\ell). \end{cases}$$

W rezultacie

$$\langle Lz, d_{k+1}^\circ(f, g, \pi) - d_k^\circ(f, g, \pi) \rangle \geq \mathbf{h}(f, g, \pi) \geq \mathbf{c}(f, g, \pi).$$

## 4. Problem obrony odcinka

### 4.1. Trajektorie dopuszczalne. Sterowania

W rozważanej przez nas grze obrony odcinka biorą udział dwaj gracze: **O** (obrońca) i **N** (napastnik). Opis takiej gry wymaga podania:

- (1) zbiorów dopuszczalnych trajektorii;
- (2) informacji jaką w danym momencie dysponują obaj gracze;
- (3) celu gry.

W trzech krótkich podrozdziałach zajmiemy się wymienionymi wyżej zagadnieniami. Na początek zdefiniujemy zbiory dopuszczalnych trajektorii obu graczy.

#### *Definicja 4.1*

(**O**) Dla każdego  $s \geq 0$  i każdego  $a \in \mathbb{R}^2$  symbolem  $X_s(a)$  oznaczamy zbiór wszystkich funkcji lipschitzowskich  $x : [s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  spełniających warunek początkowy

$$x(s) = a$$

i warunek  $\text{Lip } x \leq \rho$ . Każdy ze zbiorów  $X_s(a)$  nazwiemy zbiorem trajektorii dopuszczalnych gracza **O**. W przypadku  $s = 0$  zamiast  $X_0(a)$  będziemy też pisać  $X(a)$ .

(**N**) Dla każdego  $s \geq 0$  i każdego  $b \in \mathbb{R}^2$  symbolem  $Y_s(b)$  oznaczamy zbiór wszystkich funkcji lipschitzowskich  $y : [s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  spełniających warunek początkowy

$$y(s) = b$$

i warunek  $\text{Lip } y \leq \sigma$ . Każdy ze zbiorów  $Y_s(b)$  nazwiemy zbiorem trajektorii dopuszczalnych gracza **N**. W przypadku  $s = 0$  zamiast  $Y_0(b)$  będziemy też pisać  $Y(b)$ .

*Definicja 4.2.* Dla każdego  $s \geq 0$  symbolem  $\mathcal{U}_s$  oznaczmy zbiór wszystkich funkcji mierzalnych

$$u : [s, \infty) \rightarrow B[0, \rho].$$

Elementy zbioru  $\mathcal{U}_s$  nazwiemy sterowaniami (gracza **O**). Elementy koła  $B[0, \rho]$  będziemy utożsamiać ze sterowaniami stałymi. W przypadku  $s = 0$  zamiast  $\mathcal{U}_0$  będziemy też pisać  $\mathcal{U}$ .

#### **Uwagi**

**4.1.** Z twierdzenia Rademachera i twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki (patrz [4], twierdzenie **2**, s **81** i twierdzenie **1**, s **43**) wynika, że  $x \in X_s(a)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x(s) = a$  i dla prawie wszystkich  $t \geq s$  ma miejsce nierówność

$$\|x'(t)\| \leq \rho,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy  $x(s) = a$  i  $x' \in \mathcal{U}_s$ . Analogiczną własność posiadają trajektorie  $y \in Y_s(b)$ .

**4.2.** Jeżeli  $0 \leq s \leq \tilde{s}$ , a  $x \in X_s(a)$  i  $\tilde{x} \in X_{\tilde{s}}(x(\tilde{s}))$ , to trajektoria  $x|_{[s, \tilde{s}]}\tilde{x}$ , dana wzorem

$$(x|_{[s, \tilde{s}]}\tilde{x})(t) = \begin{cases} x(t), & \text{gdy } s \leq t \leq \tilde{s}, \\ \tilde{x}(t), & \text{gdy } t \geq \tilde{s}, \end{cases}$$



jest elementem zbioru  $X_s(a)$ . Podobna uwaga dotyczy trajektorii gracza  $\mathbf{N}$  i sterowań.

## 4.2. Funkcje nieantycypujące. Strategie

Przypuśćmy, że w momencie  $t = 0$  gracze  $\mathbf{O}$  i  $\mathbf{N}$  znajdują się w punktach, odpowiednio  $a \in \mathbb{R}^2$  i  $b \in \mathbb{R}^2$ . Przyjmujemy, że w każdym następnym momencie  $t \geq 0$  obaj gracze podejmują niezależne decyzje co do swych przyszłych działań biorąc pod uwagę dotychczasowy przebieg gry, czyli obie obcięte trajektorie  $x|_{[0,t]}$  i  $y|_{[0,t]}$ . W języku matematyki można to ująć następująco.

**Definicja 4.3.** Ustalmy dowolnie  $s \geq 0$  oraz  $a, b \in \mathbb{R}^2$ .

( $\mathbf{O}$ ) Powiemy, że  $\varphi : Y_s(b) \rightarrow X_s(a)$  jest funkcją nieantycypującą, jeżeli dla dowolnych  $y, \tilde{y} \in Y_s(b)$  i dowolnego  $t \geq s$  prawdziwa jest implikacja

$$y|_{[s,t]} = \tilde{y}|_{[s,t]} \Rightarrow (\varphi(y))|_{[s,t]} = (\varphi(\tilde{y}))|_{[s,t]}.$$

Zbiór wszystkich nieantycypujących funkcji  $\varphi : Y_s(b) \rightarrow X_s(a)$  oznaczymy symbolem  $\Phi_s(a, b)$  i nazwiemy zbiorem strategii gracza  $\mathbf{O}$ .

( $\mathbf{N}$ ) Powiemy, że  $\psi : X_s(a) \rightarrow Y_s(b)$  jest funkcją nieantycypującą, jeżeli dla dowolnych  $x, \tilde{x} \in X_s(a)$  i dowolnego  $t \geq s$  prawdziwa jest implikacja

$$x|_{[s,t]} = \tilde{x}|_{[s,t]} \Rightarrow (\psi(x))|_{[s,t]} = (\psi(\tilde{x}))|_{[s,t]}.$$

Zbiór wszystkich nieantycypujących funkcji  $\psi : X_s(a) \rightarrow Y_s(b)$  oznaczymy symbolem  $\Psi_s(a, b)$  i nazwiemy zbiorem strategii gracza  $\mathbf{N}$ .

Odwzorowania nieantycypujące wprowadził (nie nazywając ich w ten sposób) do teorii gier pościgu-ucieczki Czesław Ryll-Nardzewski w pracy [15]. O ile nam wiadomo nazwę "strategia nieantycypująca" (która nam się spodobała) wprowadził Leszek Zaremba pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Strategiami nieantycypującymi w sensie Nardzewskiego są jednak nieantycypujące i górnice półciągłe multifunkcje, szczególnie przydatne w problemach istnienia ceny rozważanej gry, patrz [15] oraz [3].

Każda para strategii nieantycypujących w sensie Nardzewskiego  $(\varphi, \psi)$  wyznacza co najmniej jedną parę trajektorii  $(x, y)$  w ten sposób, że

$$x \in \varphi(y) \quad \text{oraz} \quad y \in \psi(x).$$

Strategie o tej własności nazwijmy na moment "porządnymi". Używając języka potocznego, jeżeli gracze wybrali już swe "porządne" strategie, to w grze coś się naprawdę dzieje. Nasze strategie mogą nie wyznaczać żadnych trajektorii nawet wtedy, gdy założymy ich ciągłość (w topologii zbieżności jednostajnej w każdym ograniczonym przedziale), patrz [17]. Pojawia się zatem pytanie, czy rozważanie takich strategii ma sens.

Odpowiemy na to w ten sposób. Podążając śladami N. Krasowskiego, patrz [11], rozdział 2, §6, rozważamy grę z punktu widzenia każdego gracza z osobna. Jeżeli przy takim podejściu (mówiąc niezbyt precyzyjnie) obaj gracze, grając strategiami nieporządnymi, mogą zapewnić sobie ten sam wynik, zwany wówczas ceną gry, to z dowolną dokładnością mogą uzyskać ten sam wynik grając strategiami "porządnymi". Metody dowodu, że tak jest w istocie (dla różnych rodzajów gier

różniczkowych) bardzo przypominają metodę Eulera lub metodę Tonelliego dowodu istnienia rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego, patrz [11] lub [2].

Celem rozprawy było podanie konkretnego, jawnego wzoru wyznaczającego maksymalną długość możliwego do obrony odcinka. Techniczny problem uzyskania (z dowolną dokładnością) wyznaczonej ceny gry przy pomocy strategii "porządnych" został w pracy pominięty.

### 4.3. Problem obrony odcinka

W zasadzie rozważać będziemy grę obrony odcinka postaci  $[-\mu, \mu] \times \{0\}$ , gdzie  $\mu > 0$ . Bardziej ogólny przypadek omówimy krótko w ostatnim rozdziale. Ponieważ zakładamy przewagę prędkości po stronie napastnika, to musimy wyposażać obrońcę w broń o pewnym zasięgu. W przeciwnym razie obrońca nie byłby w stanie obronić żadnego odcinka o dodatniej długości. Można też myśleć, że wraz z obrońcą przemieszcza się pewna, bardzo niebezpieczna dla napastnika strefa, której ten powinien unikać za wszelką cenę. Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ , to zbiór  $\mathbf{C}(f, g)$  jest bardzo dobrym kandydatem do pełnienia roli strefy rażenia. Przyjmijmy wobec tego następuną definicję.

**Definicja 4.4.** Ustalmy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ , dowolną liczbę  $\mu > 0$  oraz parę takich pozycji początkowych  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , że

$$b \notin a + \text{int } \mathbf{C}(f, g).$$

(a) Symbolem  $\Phi[f, g, \mu, a, b]$  oznaczmy zbiór wszystkich strategii  $\varphi \in \Phi(a, b)$  spełniających następujący warunek. Dla każdego  $y \in Y(b)$  i każdego  $t > 0$ , jeżeli

$$y(t) \in [-\mu, \mu] \times \{0\},$$

to istnieje takie  $s \in [0, t)$ , że

$$y(s) \in \varphi(y)(s) + \text{int } \mathbf{C}(f, g).$$

Każdy element zbioru  $\Phi[f, g, \mu, a, b]$  nazwiemy strategią skutecznej obrony odcinka  $[-\mu, \mu] \times \{0\}$  w grze  $\mathcal{G}(f, g)$ .

(b) Symbolem  $\Psi[f, g, \mu, a, b]$  oznaczmy zbiór wszystkich strategii  $\psi \in \Psi(a, b)$  o tej własności, że dla każdego  $x \in X(a)$  i każdego  $t > 0$  ma miejsce relacja

$$\psi(x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(f, g)$$

i istnieje takie  $t^* \geq 0$ , że

$$\psi(x)(t^*) \in [-\mu, \mu] \times \{0\}.$$

Każdy element zbioru  $\Psi[f, g, \mu, a, b]$  nazwiemy strategią skutecznego ataku odcinka  $[-\mu, \mu] \times \{0\}$  w grze  $\mathcal{G}(f, g)$ .

Zbiór  $\Phi[f, g, \mu, a, b]$  może być pusty wtedy, gdy liczba  $\mu$  jest zbyt duża lub w przypadku (mówiąc bardzo nieprecyzyjnie) niewłaściwych proporcji pomiędzy odległościami punktów  $a$  i  $b$  do bronionego odcinka. Trzymając (na razie) stronę obrońcy musimy dać mu szansę skutecznej obrony. W związku z tym pozycje początkowe  $a, b$

wyberzemy (mówiąc znów mało precyzyjnie) w taki sposób, by odległość punktu  $a$  do bronionego odcinka była mniejsza niż odległość punktu  $b$ . Dokładne wyznaczenie zbioru wszystkich trójek  $(\mu, a, b)$ , dla których  $\Phi[f, g, \mu, a, b]$  jest zbiorem niepustym wydaje się możliwe, ale wymagałoby włączenia do rozważań gier pościgu-ucieczki o zupełnie innym charakterze niż ta, z którą chcemy mieć do czynienia. Dlatego uprościmy sobie zadanie, przyjmując warunek, postaci

$$\|b\| \geq \kappa + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|.$$

**Definicja 4.5.** Ustalmy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ , przyjmijmy

$$r(f, g) = \mathfrak{L}(f, g) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g), \quad \kappa(f, g) = 2 \frac{\rho + \sigma}{\rho} r(f, g)$$

i zdefiniujmy

$$\mathbf{P}[f, g] = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\| \right\}.$$

Liczbę

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) = 2 \sup \left\{ \mu \in (0, \infty) : \bigwedge_{(a, b) \in \mathbf{P}[f, g]} \Phi[f, g, \mu, a, b] \neq \emptyset \right\}$$

nazwiemy ceną gry  $\mathcal{G}(f, g)$ , rozwiązaniem problemu obrony odcinka w grze  $\mathcal{G}(f, g)$  lub maksymalną długością możliwego do obrony odcinka w tej grze.

Dwa kolejne rozdziały będą poświęcone dowodom nierówności

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \geq 2\mathfrak{L}(f, g) \quad \text{oraz} \quad \text{val } \mathcal{G}(f, g) \leq 2\mathfrak{L}(f, g).$$

Mówiąc nieco dokładniej dowiedzimy, że

$$\bigwedge_{\mu \in (0, 2\mathfrak{L}(f, g))} \Phi[f, g, \mu, a, b] \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{\mu > 2\mathfrak{L}(f, g)} \Psi[f, g, \mu, a, b] \neq \emptyset.$$

## 5. Obrona

Wprowadzone w poprzednim rozdziale założenie o pozycjach początkowych  $a, b$  obu graczy daje obrońcy czas na zajęcie dogodnej pozycji obronnej. Wiemy (patrz lemat 3.2), że

$$\left( \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g \right), \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right), F_{(f,g,\pi)} \right)$$

może być układem obronnym. Niech  $P$  będzie rzutem na zbiór  $\mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right)$ . Jeżeli

$$y \in Y(b) \quad \text{oraz} \quad y(t) \notin \text{int } \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g \right),$$

to

$$\xi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left( F_{(f,g,\pi)} \circ P \circ y \right)(t)$$

jest właśnie dogodną pozycją obronną. Dzięki wspomnianemu założeniu o pozycjach początkowych i dzięki lematowi 1.1 obrońca ma (przez pewien okres czasu) co najmniej dwukrotną przewagę prędkości nad "uciekającym" punktem  $\xi(t)$  i w związku z tym zdąży zająć dogodną pozycję obronną. Pogoń obrońcy za punktem  $\xi(t)$  i dalszy przebieg gry opiszemy w dwóch kolejnych podrozdziałach.

### 5.1. Pomocnicza strategia pościgu

W przypadku gier pościgu z tak zwanym ruchem prostym skuteczną strategię pościgu można konstruować kilkoma sposobami. Znany paradoks Zenona z Elei miał wpływ na podaną niżej konstrukcję pomocniczej strategii pościgu.

**Konstrukcja 5.1.** Pomocnicza strategia pościgu

$$\varphi^{\mathbf{P}}(a^*, \cdot) : X^*(a^*) \rightarrow X(a).$$

**Etap 1.** Dziedzina. Dla każdego  $a^* \in \mathbb{R}^2$  symbolem  $X^*(a^*)$  oznaczmy zbiór wszystkich trajektorii

$$\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

spełniających warunek początkowy  $\xi(0) = a^*$  i warunek Lipschitza ze stałą  $\frac{1}{2}\rho$ .

**Etap 2.** Wzór. Dla dowolnych  $a, a^* \in \mathbb{R}^2$  i dowolnego  $\xi \in X^*(a^*)$  przyjmujemy

$$\tau^*(a, a^*) = \frac{2 \|a^* - a\|}{\rho}.$$

Jeżeli  $a^* = a$ , to dla każdego  $\xi \in X^*(a^*)$  definiujemy

$$\varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi) = \xi,$$

a jeżeli  $a^* \neq a$ , to dla każdego  $\xi \in X^*(a^*)$  definiujemy

$$\varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi)(t) = \begin{cases} a + \frac{\rho t}{\|a^* - a\|} (a^* - a), & \text{gdy} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \tau^*(a, a^*), \\ \xi(2t - \tau^*(a, a^*)), & \text{gdy} \quad \frac{1}{2} \tau^*(a, a^*) \leq t \leq \tau^*(a, a^*), \\ \xi(t), & \text{gdy} \quad \tau^*(a, a^*) \leq t. \end{cases}$$

**Etap 3.** Własności

**1.** Poprawność definicji. Weźmy dowolne  $\xi \in X^*(a^*)$  i przyjmijmy  $x = \varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi)$ . Łatwo sprawdzić, że  $x$  jest funkcją ciągłą. Poza tym, dla prawie wszystkich  $t \geq 0$ :

jeżeli  $a^* = a$ , to

$$x'(t) = \xi'(t),$$

a jeżeli  $a^* \neq a$ , to

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{\rho}{\|a^* - a\|} (a^* - a), & \text{gdy } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\tau^*(a, a^*), \\ 2\xi'(2t - \tau^*(a, a^*)), & \text{gdy } \frac{1}{2}\tau^*(a, a^*) \leq t \leq \tau^*(a, a^*), \\ \xi'(t), & \text{gdy } \tau^*(a, a^*) \leq t. \end{cases}$$

W obu przypadkach mamy

$$\|x'(t)\| \leq \rho, \text{ p.w. w przedziale } [0, \infty),$$

więc  $\varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi) \in X(a)$ . Dowodzi to poprawności definicji odwzorowania  $\varphi^{\mathbf{P}}(a, \cdot)$ .

## 2. Odwzorowanie

$$\varphi^{\mathbf{P}}(a^*, \cdot) : X^*(a^*) \rightarrow X(a)$$

jest funkcją nieantycypującą. Weźmy bowiem dowolne  $t \geq 0$ , dowolne trajektorie  $\xi, \tilde{\xi} \in X^*(a^*)$  spełniające warunek

$$\xi|_{[0,t]} = \tilde{\xi}|_{[0,t]}$$

i przyjmijmy

$$\tau^*(a, a^*) = \tau^*, \quad x = \varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi) \quad \text{oraz} \quad \tilde{x} = \varphi^{\mathbf{P}}(a, \tilde{\xi}).$$

Pominiemy trywialny przypadek  $a^* = a$ . Jeżeli  $t \leq \frac{1}{2}\tau^*$ , to oczywiście

$$x|_{[0,t]} = \tilde{x}|_{[0,t]}.$$

Jeżeli  $\frac{1}{2}\tau^* \leq s \leq t \leq \tau^*$ , to

$$2s - \tau^* \leq 2t - \tau^* \leq \tau^*,$$

więc

$$x(s) = \xi(2s - \tau^*) = \tilde{\xi}(2s - \tau^*) = \tilde{x}(s),$$

a wobec tego również i w tym przypadku mamy

$$x|_{[0,t]} = \tilde{x}|_{[0,t]}.$$

Łatwo sprawdzić, że podobnie jest w przypadku  $\tau^* \leq t$ .

**3. Czas pościgu.** Dla każdego  $\xi \in X^*(a^*)$ , w obu przypadkach  $a^* = a$  i  $a^* \neq a$ , mamy

$$\varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi)(\tau^*(a, a^*)) = \xi(\tau^*(a, a^*)),$$

więc punkt  $\varphi^{\mathbf{P}}(a, \xi)(t)$  dogoni punkt  $\xi(t)$  nie później niż po czasie

$$\tau^*(a, a^*) = \frac{2\|a^* - a\|}{\rho}.$$

## 5.2. Strategia czuwania

Niech będzie dana para  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ . Dla każdej pary pozycji początkowych  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniających warunek (patrz definicja 4.5)

$$\|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|$$

i każdego  $\lambda \in (0, \mathfrak{L}(f, g))$  zdefiniujemy strategię  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot) \in \Phi[f, g, \lambda, a, b]$  broniącą odcinka

$$[-\lambda, \lambda] \times \{0\}$$

w grze ze strefą rażenia  $\mathbf{C}(f, g)$ . Strategię  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot)$  nazwiemy strategią czuwania.

**Konstrukcja 5.2.** Ustalmy parę  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ , pozycje początkowe  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunek

$$\|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|$$

i liczbę  $\lambda \in (0, \mathfrak{L}(f, g))$ .

**Etap 1.** Pomocnicza para  $(f^{\varkappa}, g^{\varkappa}) \in \mathbf{W}[\ell]$ . Przyjmijmy

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{L}^{\frac{2}{3}}(f, g)}{\lambda^{\frac{2}{3}}}.$$

Ponieważ  $\varkappa > 1$ , to (patrz punkt (b) lematu 3.1) istnieje taki podział  $\pi \in \Pi[\ell]$  i taka para  $(f^{\varkappa}, g^{\varkappa}) \in \mathbf{W}[\ell]$  że

$$(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\varkappa\ell],$$

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \subset \varkappa\mathbf{C}(f, g)$$

oraz

$$\sqrt{\varkappa}\mathfrak{L}(f, g) \leq \mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \leq \varkappa\mathfrak{L}(f, g).$$

Zgodnie z lematem 3.2 trójka

$$\left( \mathbf{C}\left(\mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{O}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f^{\varkappa}, \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{O}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g^{\varkappa}\right), \mathbf{C}\left(\mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f^{\varkappa}, \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g^{\varkappa}\right), F\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f^{\varkappa}, \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g^{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\pi\right) \right)$$

jest układem obronnym ze strefą rażenia  $\mathbf{C}\left(\mathcal{L}_{\frac{\pi}{\varkappa}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f^{\varkappa}, \mathcal{L}_{\frac{\pi}{\varkappa}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g^{\varkappa}\right)$ . Poza tym mamy (patrz punkt (a) lematu 3.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\left(\mathcal{L}_{\frac{\pi}{\varkappa}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}f^{\varkappa}, \mathcal{L}_{\frac{\pi}{\varkappa}}\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}g^{\varkappa}\right) &= \mathbf{C}\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})\right) = \frac{1}{\varkappa}\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}, \mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa}) \\ &\subset \frac{1}{\varkappa}\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(f, g) \end{aligned}$$

oraz

$$\mathfrak{L}\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})\right) \geq \lambda,$$

bo

$$\mathfrak{L}\left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})\right) = \frac{1}{\varkappa^2}\mathfrak{L}(\mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}f^{\varkappa}), \mathcal{J}_{\varkappa}(\mathcal{L}_{\pi}g^{\varkappa})) \geq \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa^2}\mathfrak{L}(f, g) = \lambda.$$

**Etap 2.** Definicja strategii  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot)$ . Oznaczmy przez  $P$  rzut na zbiór

$$\Omega_{\mathbf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa}, \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} g^{\varkappa} \right)$$

i przyjmijmy (patrz definicja 4.5 i lemat 1.1)

$$\begin{aligned} F &= F \left( \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa}, \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} g^{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa} \pi \right), \quad r = \mathfrak{L}(f, g) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g) \\ b^* &= (P \circ P_r)(b), \quad a^* = F(b^*). \end{aligned}$$

Dla każdego  $y \in Y(b)$  definiujemy

$$T^{\mathbf{N}}(y) = \{t \geq t_* : y(t) \notin \Omega_{\mathbf{N}}\}, \quad \tau^{\mathbf{N}}(y) = \sup T^{\mathbf{N}}(y).$$

Następnie (patrz konstrukcja 5.1), jeżeli  $\tau^{\mathbf{N}}(y) = \infty$ , to przyjmujemy

$$\varphi(f, g, \lambda; a, y) = \varphi^{\mathbf{P}}(a, F \circ P \circ P_r \circ y),$$

a jeżeli  $\tau^{\mathbf{N}}(y) < \infty$ , to przyjmujemy

$$\varphi(f, g, \lambda; a, y)(t) = \begin{cases} \varphi^{\mathbf{P}}(a, (F \circ P \circ P_r \circ y)(t)), & \text{gdy } t_* \leq t \leq \tau^{\mathbf{N}}(y), \\ \varphi(f, g, \lambda; a, y)(\tau^{\mathbf{N}}(y)), & \text{gdy } \tau^{\mathbf{N}}(y) \leq t. \end{cases}$$

Zauważmy, że w przypadku  $\tau^{\mathbf{N}}(y) < \infty$  trajektoria  $\varphi(f, g, \lambda; a, y)(\cdot)$  jest funkcją stałą w przedziale  $[\tau^{\mathbf{N}}(y), \infty)$ . Deklarowane na początku tego podrozdziału własności odwzorowania  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot)$  zawiera

**Twierdzenie 5.1.** *Założmy, że  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$  i obierzmy dowolne  $\lambda \in (0, \mathfrak{L}(f, g))$ . Jeżeli pozycje początkowe  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniają warunek*

$$\|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|,$$

to  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot) \in \Phi(a, b)$  i strategia  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot)$  broni skutecznie odcinka

$$[-\lambda, \lambda] \times \{0\}$$

w grze  $\mathcal{G}(f, g)$ .

**Dowód.** Przyjmijmy (patrz konstrukcja 5.2 i definicja 4.5)

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{L}^{\frac{2}{3}}(f, g)}{\lambda^{\frac{2}{3}}}, \quad \ell_{\varkappa} = \mathfrak{L} \left( \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} \mathcal{L}_{\pi} f^{\varkappa}, \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} \mathcal{L}_{\pi} g^{\varkappa} \right),$$

$$r = \mathfrak{L}(f, g) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g), \quad \kappa(f, g) = 2 \frac{\rho + \sigma}{\rho} r$$

i ustalmy dowolne pozycje początkowe  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunek

$$\|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|.$$

**Część 1.** Poprawność definicji. Zaczniemy od dowodu inkluzji

$$\Omega_{\mathbf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} \left( \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa}, \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} g^{\varkappa} \right) \subset B[0, r].$$

Obierzmy dowolne  $\tau \in [-\ell_{\varkappa}, \ell_{\varkappa}]$  i przyjmijmy

$$\eta_- = (-\ell_{\varkappa}, 0), \quad \eta_{\tau} = \left( \tau, \left( \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa} \right) (\tau) \right), \quad \eta_+ = (\ell_{\varkappa}, 0).$$

Mamy (por. uwaga 2.4)

$$\begin{aligned} \|\eta_- - \eta_{\tau}\| + \|\eta_{\tau} - \eta_+\| &\leq \Lambda \left( \mathcal{S}_{\frac{1}{\varkappa}\pi}^{\mathbf{N}} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa} \right) \leq \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda \left( \mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa} \right) \\ &= \frac{1}{\varkappa} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f^{\varkappa}) \leq \frac{1}{\varkappa} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g), \end{aligned}$$

więc

$$\min \{ \|\eta_- - \eta_{\tau}\|, \|\eta_{\tau} - \eta_+\| \} \leq \frac{1}{2\varkappa} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g) < \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g).$$

Ponieważ

$$\|\eta_-\| = \|\eta_+\| = \ell_{\varkappa} \leq \mathfrak{L}(f, g),$$

to

$$\|\eta_{\tau}\| < \mathfrak{L}(f, g) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g) = r.$$

Obierzmy dowolne  $y \in Y(b)$ . Dla  $t \geq 0$  mamy

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|b - y(t) - b\| = \|b - y(t) - y(0)\| \geq \|b\| - \|y(t) - y(0)\| \\ &\geq \|b\| - \sigma t \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\| - \sigma t \\ &= 2 \frac{\rho + \sigma}{\rho} r + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\| - \sigma t. \end{aligned}$$

W takim razie, jeżeli

$$0 \leq t < \frac{2}{\rho} (\|a\| + r),$$

to

$$\|y(t)\| > 2 \frac{\rho + \sigma}{\rho} r + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\| - \frac{2\sigma}{\rho} (\|a\| + r) = 2r.$$

Zatem

$$\theta(y) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ t \geq 0 : \|y(t)\| \geq 2r \} \geq \frac{2}{\rho} (\|a\| + r),$$

a poza tym

$$\theta(y) < \tau^{\mathbf{N}}(y).$$

Wobec lematu 1.1

$$\text{Lip } P \circ P_r \circ y_{|[0, \theta(y)]} \leq (\text{Lip } P) \times (\text{Lip } P_r) \times (\text{Lip } y_{|[0, \theta(y)]}) \leq \frac{1}{2} \sigma,$$

więc (patrz lemat 3.2 i definicja 3.3)

$$\text{Lip } F \circ P \circ P_r \circ y_{|[0, \theta(y)]} \leq \frac{1}{2} \rho.$$



Ponieważ

$$\|a^* - a\| \leq \|a^*\| + \|a\| \leq r + \|a\| ,$$

to (patrz konstrukcja **5.1**)

$$\tau^*(a, a^*) = \frac{2}{\rho} \|a^* - a\| \leq \frac{2}{\rho} (r + \|a\|) \leq \theta(y) < \tau^{\mathbf{N}}(y) .$$

Dowodzi to poprawności definicji odwzorowania

$$\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot) : Y(b) \rightarrow X(a) .$$

**Część 2.** Własności. Ponieważ pomocnicza strategia pościgu  $\varphi^{\mathbf{P}}(a, \cdot)$  jest funkcją nieantycypującą, to  $\varphi(f, g, \lambda; a, \cdot)$  również jest funkcją nieantycypującą. Wybierzmy dowolnie  $y \in Y(b)$  i przyjmijmy

$$x = \varphi(f, g, \lambda; a, y) .$$

Przypuśćmy, że dla pewnego  $t_* > 0$  ma miejsce relacja

$$y(t_*) \in [-\lambda, \lambda] \times \{0\} .$$

Ponieważ

$$[-\lambda, \lambda] \times \{0\} \subset (-\ell_{\varkappa}, \ell_{\varkappa}) \times \{0\} \subset \Omega_{\mathbf{N}} ,$$

to istnieje takie  $\tau_* \in (0, t_*]$ , że

$$y(t_*) \in \Omega_{\mathbf{N}} .$$

Oczywiście

$$0 < \tau^{\mathbf{N}}(y) \leq \tau_* \text{ oraz } y(t) \notin \Omega_{\mathbf{N}}, \text{ gdy } 0 \leq t < \tau^{\mathbf{N}}(y) .$$

Natomiast (patrz lemat **3.2**), dla wszystkich  $t \in [\theta(y), \tau^{\mathbf{N}}(y)]$ ,

$$x(t) - (F \circ P \circ P_r \circ y)(t) \in \mathbf{C} \left( \mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} f^{\varkappa}, \mathcal{L}_{\frac{1}{\varkappa}\pi} \mathcal{J}_{\frac{1}{\varkappa}} g^{\varkappa} \right) \subset \text{int } \mathbf{C}(f, g) ,$$

co wobec nierówności

$$\theta(y) < \tau^{\mathbf{N}}(y) \leq \tau_* \leq t_*$$

kończy dowód twierdzenia.

**Wniosek 5.1.** Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell]$ , to

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \geq 2\mathcal{L}(f, g) .$$

Inaczej mówiąc, cena gry  $\mathcal{G}(f, g)$  nie może być mniejsza niż

$$\frac{2\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( f(-\ell) + f(\ell) + \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau \right) .$$

**Przykład 5.1.** Zgodnie z lematem **3.2** i wnioskiem **5.1**, jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[2]$  jest parą z przykładu **2.2**, to

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \geq 2\ell^{\mathbf{N}} = 12 ,$$

a jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[14]$  jest parą z przykładu **3.7**, to

$$\begin{aligned} \text{val } \mathcal{G}(f, g) &\geq 2\ell^{\mathbf{N}} = \frac{171}{4} = 42,75, \text{ gdy } \rho = 1, \sigma = 3, \\ \text{val } \mathcal{G}(f, g) &\geq 2\ell^{\mathbf{N}} = \frac{1300}{9} \approx 144,44, \text{ gdy } \rho = 1, \sigma = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

W następnym, znacznie dłuższym, rozdziale dowiedziemy nierówności

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \leq 2\mathcal{L}(f, g) .$$

## 6. Atak

Wraz z broniącym odcinka graczem **O** przemieszcza się zatoczona wokół niego strefa rażenia. Dysponujący przewagą prędkości napastnik **N** jest w stanie okrążyć tę ruchomą strefę dowolną liczbę razy poruszając się po jej brzegu z możliwie maksymalną prędkością. Obrońca nie może temu przeciwdziałać żadnym sposobem. Jeżeli broniony odcinek jest zbyt długi, to intuicyjnie jest oczywiste, że w końcu dojdzie do takiej pozycji  $(x(t), y(t))$ , w której napastnik będzie mógł ruszyć po linii prostej z maksymalną prędkością w kierunku bronionego odcinka, nie wpadając po drodze do wnętrza strefy rażenia. Taka jest idea strategii ataku, którą zajmujemy się w tym rozdziale.

Z matematycznego punktu widzenia najważniejszą będzie pewna ekstremalna własność owego krążenia napastnika po brzegu ruchomej strefy rażenia. Ponieważ strefę rażenia aproksymujemy wielokątem, to zaczniemy od zbadania pewnych własności ruchu napastnika wzdłuż przemieszczającego się odcinka.

### 6.1. Jazda wzdłuż ruchomego odcinka

Przypuśćmy, że obrońca porusza się po trajektorii  $x \in X(a^*)$  i wraz z nim przemieszcza się strefa rażenia  $D$ . Suma

$$x(t) + D$$

jest wówczas położeniem tej strefy w chwili  $t$ . Jeżeli odcinek  $[d^*, d^{**}]$  leży na brzegu strefy  $D$ , to w chwili  $t$  odcinek  $[d^*, d^{**}]$  zajmie położenie

$$[d^*(t), d^{**}(t)] = x(t) + [d^*, d^{**}].$$

Przypuśćmy dalej, że w chwili  $t$  obrońca znajduje się w punkcie  $a$ , a napastnik **N** znajduje się właśnie w punkcie

$$b = d^*(t) = x(t) + d^* = a + d^*$$

i zamierza jak najszybciej dotrzeć do drugiego końca (ruchomego) odcinka, przemieszczając się wzdłuż tegoż odcinka. W chwili  $t$  mamy

$$b - a = d^*,$$

więc w pewnej chwili  $\tau > t$  powinno być

$$y(\tau) - x(\tau) = d^{**},$$

a poza tym powinno być też

$$y(s) - x(s) \in [d^*, d^{**}], \quad t \leq s \leq \tau.$$

Aby zrealizować ten cel gracz **N** musi wybrać trajektorię  $y \in Y_t(b)$  tak, by przynajmniej przez pewien czas miała miejsce relacja

$$y(s) - x(s) = b - a + \phi(s)w,$$

gdzie

$$w = d^{**} - d^* \quad \text{oraz} \quad 0 \leq \phi(s) \leq 1,$$

bo wtedy

$$y(s) = x(s) + b - a + \phi(s)w = x(s) + d^* + \phi(s)(d^{**} - d^*) \in x(s) + [d^*, d^{**}].$$

Oczywiście zarówno sama chwila  $\tau$ , jak też cała trajektoria  $y$ , zależą od poczynañ obrońcy, czyli od trajektorii  $x_{|[t, \infty)}$ . Zauważmy dalej (zakładamy oczywiście relację  $d^* \neq d^{**}$ ), że równość

$$y(\tau) - x(\tau) = d^{**}$$

będzie mieć miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\phi(\tau) = 1.$$

W tym rozdziale trzymamy stronę napastnika, więc dobierzemy funkcję  $\phi$  w taki sposób, by dla prawie wszystkich  $s \geq t$  było

$$\|x'(s) + \phi'(s)w\| = \|y'(s)\| = \sigma,$$

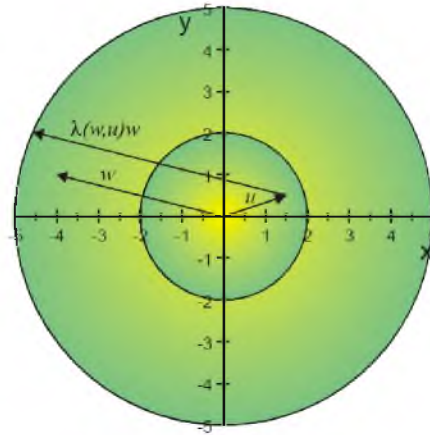
co umożliwi napastnikowi dotarcie do ruchomego punktu  $d^{**}$  w możliwie najkrótszym czasie.

Celem tego podrozdziału jest zbadanie własności opisanej wyżej trajektorii  $y$ . Wprowadzimy funkcję dwóch zmiennych będącą odpowiednikiem pochodnej  $\phi'$ .

**Definicja 6.1.** Dla każdego  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  i każdego  $u \in B[0, \rho]$  definiujemy

$$\lambda(w, u) = \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \|u\|^2) \|w\|^2 + \langle w, u \rangle^2} - \langle w, u \rangle}{\|w\|^2}.$$

Ilustracją definicji 6.1 jest



**Rys. 6.1.** Wektor  $\lambda(w, u)w$  dla  $u = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $w = (-4, 1)$ , gdzie  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 5$ .

Natomiast pochodzenie wzoru definiującego wielkość  $\mathfrak{L}(f, g)$  wyjaśnia częściowo

**Lemat 6.1**

(a) Dla każdego  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  i każdego  $u \in B[0, \rho]$  mamy

$$\frac{\sigma - \rho}{\|w\|} \leq \lambda(w, u) \leq \frac{\sigma + \rho}{\|w\|} \quad \text{oraz} \quad \|u + \lambda(w, u)w\| = \sigma.$$

(b) Dla każdego  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , każdego  $a \in \mathbb{R}^2$ , każdego  $t \geq 0$  i każdej trajektorii  $x \in X_t(a)$  istnieje dokładnie jedno takie  $\mathcal{T}(w, x, t)$ , że

$$t + \frac{\|w\|}{\sigma + \rho} \leq \mathcal{T}(w, x, t) \leq t + \frac{\|w\|}{\sigma - \rho} \quad \text{oraz} \quad \int_t^{\mathcal{T}(w, x, t)} \lambda(w, x'(s)) ds = 1.$$

(c) Dla każdego  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  i każdego  $u \in B[0, \rho]$  ma miejsce relacja

$$u + \lambda(w, u)w \in \lambda(w, u)B\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2}w, \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2}\|w\|\right].$$

**Dowód punktu (a).** Ustalmy dowolnie  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  oraz  $u \in B[0, \rho]$ . Mamy

$$-\rho\|w\| \leq \langle w, u \rangle \leq \rho\|w\|,$$

więc

$$\begin{aligned} \lambda(w, u) &= \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \|u\|^2)\|w\|^2 + \langle w, u \rangle^2} - \langle w, u \rangle}{\|w\|^2} \\ &\geq \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \rho^2)\|w\|^2 + \langle w, u \rangle^2} - \langle w, u \rangle}{\|w\|^2} \\ &= \frac{\sigma^2 - \rho^2}{\sqrt{(\sigma^2 - \rho^2)\|w\|^2 + \langle w, u \rangle^2} + \langle w, u \rangle} \\ &\geq \frac{\sigma^2 - \rho^2}{\sqrt{(\sigma^2 - \rho^2)\|w\|^2 + \rho^2\|w\|^2} + \rho\|w\|} \\ &= \frac{\sigma - \rho}{\|w\|}, \end{aligned}$$

co dowodzi pierwszej nierówności. Ponieważ

$$\|u\|^2\|w\|^2 \geq \langle w, u \rangle^2,$$

to

$$\begin{aligned} \lambda(w, u) &= \frac{\sqrt{\sigma^2\|w\|^2 - (\|u\|^2\|w\|^2 - \langle w, u \rangle^2)} - \langle w, u \rangle}{\|w\|^2} \\ &\leq \frac{\sigma\|w\| - \langle w, u \rangle}{\|w\|^2} \leq \frac{\sigma\|w\| + \rho\|w\|}{\|w\|^2} = \frac{\sigma + \rho}{\|w\|}, \end{aligned}$$

co kończy dowód drugiej nierówności. Dla każdego  $\mu \in \mathbb{R}$  mamy

$$\|u + \mu w\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle w, u \rangle\mu + \|w\|^2\mu^2$$

i łatwo sprawdzić, że liczba  $\mu = \lambda(w, u)$  jest jednym z pierwiastków równania

$$\|w\|^2 \mu^2 + 2 \langle w, u \rangle \mu + \|u\|^2 - \sigma^2 = 0.$$

Kończy to dowód punktu (a).

**Dowód punktu (b).** Ustalmy dowolnie  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \geq 0$  oraz  $x \in X_t(a)$ . Na mocy nierówności z punktu (a), dla każdego  $\tau \geq t$  mamy

$$\frac{\sigma - \rho}{\|w\|} (\tau - t) = \int_t^\tau \frac{\sigma - \rho}{\|w\|} ds \leq \int_t^\tau \lambda(w, x'(s)) ds \leq \int_t^\tau \frac{\sigma + \rho}{\|w\|} ds = \frac{\sigma + \rho}{\|w\|} (\tau - t).$$

Istnieje zatem dokładnie jedno takie  $\mathcal{T}(w, x, t)$ , że

$$\frac{\sigma - \rho}{\|w\|} (\mathcal{T}(w, x, t) - t) \leq \int_t^{\mathcal{T}(w, x, t)} \lambda(w, x'(s)) ds = 1 \leq \frac{\sigma + \rho}{\|w\|} (\mathcal{T}(w, x, t) - t)$$

oraz

$$t + \frac{\|w\|}{\sigma + \rho} \leq \mathcal{T}(w, x, t) \leq t + \frac{\|w\|}{\sigma - \rho}.$$

**Dowód punktu (c).** Ustalmy dowolnie  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  oraz  $u \in B[0, \rho]$ . Upraszczając oznaczenia, przyjmijmy

$$\lambda(w, u) = \lambda.$$

Ponieważ

$$\lambda B \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} w, \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w\| \right] = B \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda w, \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda \|w\| \right],$$

to należy dowieść nierówności

$$\left\| \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda w - \lambda w - u \right\| \leq \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda \|w\|.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez dodatnią liczbę  $\sigma^2 - \rho^2$  i uwzględniając równość

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda w - \lambda w = \frac{\rho^2}{\sigma^2 - \rho^2} \lambda w$$

otrzymujemy jej równoważną postać:

$$\left\| \rho^2 \lambda w - (\sigma^2 - \rho^2) u \right\| \leq \rho\sigma \lambda \|w\|.$$

Po wstępnym podniesieniu obu stron otrzymanej nierówności do kwadratu otrzymujemy kolejne, równoważne postaci wyjściowej nierówności:

$$\begin{aligned} \rho^4 \|w\|^2 \lambda^2 - 2\rho^2 (\sigma^2 - \rho^2) \langle w, u \rangle \lambda + (\sigma^2 - \rho^2)^2 \|u\|^2 &\leq \rho^2 \sigma^2 \|w\|^2 \lambda^2, \\ -2\rho^2 (\sigma^2 - \rho^2) \langle w, u \rangle \lambda + (\sigma^2 - \rho^2)^2 \|u\|^2 &\leq \rho^2 (\sigma^2 - \rho^2) \|w\|^2 \lambda^2, \\ -2\rho^2 \langle w, u \rangle \lambda + (\sigma^2 - \rho^2) \|u\|^2 &\leq \rho^2 \|w\|^2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\lambda$  jest pierwiastkiem równania

$$\|w\|^2 \lambda^2 + 2 \langle w, u \rangle \lambda + \|u\|^2 - \sigma^2 = 0,$$

to

$$\|w\|^2 \lambda^2 = \sigma^2 - 2 \langle w, u \rangle \lambda - \|u\|^2$$

i w związku z tym rozważana nierówność przybiera kolejne, równoważne postaci:

$$\begin{aligned} -2\rho^2 \langle w, u \rangle \lambda + (\sigma^2 - \rho^2) \|u\|^2 &\leq \rho^2 (\sigma^2 - 2 \langle w, u \rangle \lambda - \|u\|^2), \\ \sigma^2 \|u\|^2 &\leq \rho^2 \sigma^2 \\ \|u\| &\leq \rho. \end{aligned}$$

Kończy to dowód lematu 6.1.

## 6.2. Maksymalne rozciągnięcie

Rozważmy parę  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  i założmy, że w chwili  $t = 0$  pozycje początkowe spełniają warunek

$$b - a = (\ell, 0).$$

Założmy dalej, że obrońca wybiera trajektorię  $x \in X(a)$ , a napastnik postanawia krążyć z maksymalną prędkością po brzegu ruchomej strefy rażenia  $x(t) + \mathbf{C}(f, g)$  (zgodnie z dodatnią orientacją płaszczyzny). Nastąpią takie dwa kolejne momenty  $0 < t_1 < t_2$ , w których będzie

$$y(t_1) - x(t_1) = (-\ell, 0) \quad \text{oraz} \quad y(t_2) - x(t_2) = (\ell, 0).$$

Jeżeli obrońca wybrał trajektorię  $x \in X(a)$  w taki sposób, że

$$x(t_2) = a, \quad y(t_2) = b,$$

a na dodatek trajektoria  $y$  zatoczyła łuk otaczający (bez przecięć) odcinek

$$[y(t_1), b],$$

to (przynajmniej do momentu  $t_2$ ) odcinek  $[y(t_1), b]$  został obroniony. Zajmiemy się problemem wyznaczenia górnego ograniczenia długości takiego odcinka. Rozważać będziemy odcinki położone na osi odciętych i wielokątne strefy rażenia. Natomiast wektor  $b - a$  będzie dowolnym elementem brzegu strefy rażenia, niekoniecznie punktem  $(\ell, 0)$ .

Najpierw zajmiemy się opisem ruchu napastnika po brzegu ruchomego wielokąta. Ustalmy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$  i dowolny podział  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g]$ . Niech (patrz konstrukcja 3.1)  $\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$  będzie orientacją brzegu wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Przypuśćmy, że w pewnym momencie  $t_* \geq 0$  napastnik znalazł się na brzegu wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Oznaczmy przez  $a^*$  i  $b^*$  pozycje obrońcy i napastnika w momencie  $t_*$ . Mamy

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} b^* - a^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Napastnik zamierza teraz krążyć po brzegu ruchomego wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$  zgodnie z jego orientacją i możliwie maksymalną prędkością. Opisuując ruch napastnika (zależny oczywiście od poczynąń obrońcy) włączymy punkt  $\zeta^*$  do zbioru "wierzchołków" wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Wymaga to pewnej modyfikacji ciągu  $\{d_k^\circ(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$ .

**Konstrukcja 6.1.** Ustalamy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , dowolny podział

$$\pi = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\} \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g],$$

dowolne  $t_* \geq 0$  i dowolne  $a^*, b^* \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunek

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} b^* - a^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Niech (patrz konstrukcja 3.1)  $\{d_k^\odot(f, g, \pi)\}_{k=0}^\infty$  będzie orientacją brzegu wielokąta  $\mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ .

**Etap 1.** Modyfikacja numeracji. Istnieje dokładnie jedno takie

$$m \in \{0, 1, \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi) - 1\},$$

że

$$\zeta^* \in [d_m^\odot(f, g, \pi), d_{m+1}^\odot(f, g, \pi)).$$

Możliwe są dwa przypadki:

$$(a) \ \zeta^* = d_m^\odot(f, g, \pi) \quad \text{oraz} \quad (b) \ \zeta^* \neq d_m^\odot(f, g, \pi).$$

Przypadek (a). Przyjmujemy

$$\mathbf{n}(f, g, \pi; \zeta^*) = \mathbf{n}(f, g, \pi)$$

i definiujemy

$$d_k^\odot(f, g, \pi; \zeta^*) = d_{m+k}^\odot(f, g, \pi), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Przypadek (b). Przyjmujemy

$$\mathbf{n}(f, g, \pi; \zeta^*) = \mathbf{n}(f, g, \pi) + 1,$$

definiujemy

$$\begin{aligned} d_0^\odot(f, g, \pi; \zeta^*) &= \zeta^*, \\ d_k^\odot(f, g, \pi; \zeta^*) &= d_{m+k}^\odot(f, g, \pi), \quad k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}(f, g, \pi; \zeta^*) - 1, \end{aligned}$$

i skończony ciąg  $\{d_k^\odot(f, g, \pi; \zeta^*)\}_{k=0}^{\mathbf{n}(f, g, \pi; \zeta^*)-1}$  przedłużamy do ciągu  $\{d_k^\odot(f, g, \pi; \zeta^*)\}_{k=0}^\infty$  o okresie  $\mathbf{n}(f, g, \pi; \zeta^*)$ .

**Etap 2.** Ciąg kierujący  $\{w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\}_{k=0}^\infty$ . Dla każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  definiujemy

$$w_k(f, g, \pi; \zeta^*) = d_{k+1}^\odot(f, g, \pi; \zeta^*) - d_k^\odot(f, g, \pi; \zeta^*).$$

**Etap 3.** Strategia  $\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, \cdot)$  kierowana ciągiem  $\{w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\}_{k=0}^\infty$ . Weźmy dowolne  $x \in X_{t_*}(a^*)$ . Przyjmujemy (patrz punkt (b) lematu 6.1)

$$\mathbf{t}_0(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = t_*, \quad \mathbf{t}_1(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = \mathcal{T}(w_0(f, g, \pi; \zeta^*), x, \mathbf{t}_0(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x))$$

i dla każdego  $t \in [\mathbf{t}_0(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_1(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$  definiujemy

$$\begin{aligned} &\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) \\ &= b^* - a^* \\ &\quad + x(t) + \left( \int_{\mathbf{t}_0(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_0(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) w_0(f, g, \pi; \zeta^*). \end{aligned}$$

Następnie, dla każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  przyjmujemy

$$\mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = \mathcal{T}(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x, \mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x))$$

i dla każdego  $t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$  definiujemy

$$\begin{aligned} & \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) \\ = & \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) - x(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) \\ & + x(t) + \left( \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) w_k(f, g, \pi; \zeta^*). \end{aligned}$$

**Etap 4.** Momenty powrotu. Dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$  definiujemy

$$z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x) - x,$$

$$\theta_0(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = t_*$$

i dla każdego  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & \theta_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) \\ = & \sup \left\{ t > \theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) : \bigwedge_{s \in (\theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), t)} z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(s) \neq \zeta^* \right\}. \end{aligned}$$

**Etap 5.** Własności

1.  $\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, \cdot) \in \Psi_{t_*}(a^*, b^*)$ .

2. Dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$ , każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  i każdego

$$t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$$

mamy

$$\begin{aligned} & z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(t) - z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) \\ \in & \left( \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) [0, w_k(f, g, \pi; \zeta^*)], \end{aligned}$$

a dla prawie wszystkich  $t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$  mamy

$$\sigma - \rho \leq \left\| \frac{d}{dt} z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(t) \right\| \leq \sigma + \rho.$$

Poza tym dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$  i każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  ma miejsce równość

$$\begin{aligned} & z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) - z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) \\ = & w_k(f, g, \pi; \zeta^*). \end{aligned}$$

3. Ciąg  $\{\theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)\}_{k=0}^\infty$  jest ściśle rosnący i mamy

$$z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) = \zeta^*, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = \infty.$$



4. Dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$ , każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  i prawie wszystkich

$$t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$$

ma miejsce relacja

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) \\ \in & \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(t)) B \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} w_k(f, g, \pi; \zeta^*), \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\| \right]. \end{aligned}$$

**Dowód własności 1.** Dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$  trajektoria  $\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)$  jest zdefiniowana poprawnie. Z punktu (a) lematu **6.1** i twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki wynika, że dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$  mamy

$$\left\| \frac{d}{dt} \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) \right\| = \sigma,$$

więc

$$\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x) \in Y_{t_*}(b^*).$$

Ponieważ  $\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, \cdot)$  jest funkcją nieantycypującą, to

$$\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, \cdot) \in \Psi_{t_*}(a^*, b^*).$$

**Dowód własności 2.** Ustalmy dowolnie  $x \in X_{t_*}(a)$  oraz  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dla prawie wszystkich

$$t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$$

mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(t) &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) w_k(f, g, \pi; \zeta^*) \\ &= \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(t)) w_k(f, g, \pi; \zeta^*), \end{aligned}$$

więc (patrz punkt (a) lematu **6.1**)

$$\sigma - \rho \leq \left\| \frac{d}{dt} z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(t) \right\| \leq \sigma + \rho.$$

Dla każdego  $t \in [\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)]$  mamy

$$\begin{aligned} & z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(t) - z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) \\ = & \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) - \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) \\ & - (x(t) - x(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x))) \\ = & \left( \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) w_k(f, g, \pi; \zeta^*) \\ \in & \left( \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \right) [0, w_k(f, g, \pi; \zeta^*)], \end{aligned}$$

bo

$$0 \leq \int_{\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^t \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(s)) ds \leq 1.$$

Ostatnia z własności **2** jest konsekwencją równości

$$\int_{\mathbf{t}_k(f,g,\pi;t_*,\zeta^*,x)}^{\mathbf{t}_{k+1}(f,g,\pi;t_*,\zeta^*,x)} \lambda(w_k(f,g,\pi;\zeta^*), x'(s)) ds = 1.$$

**Dowód własności 3.** Ustalmy dowolnie  $x \in X_{t_*}(a)$  oraz  $k \in \mathbb{N}_0$ . Ponieważ (patrz własność **2**)

$$\text{Lip } z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) \leq \sigma + \rho,$$

to

$$\begin{aligned} & \|w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\| \\ = & \|z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)) - z(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)(\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x))\| \\ \leq & (\sigma + \rho)(\mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) - \mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) - \mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) \\ \geq & \frac{\|w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\|}{\sigma + \rho} \geq \min_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{\|w_j(f, g, \pi; \zeta^*)\|}{\sigma + \rho} > 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd własność **3**.

**Dowód własności 4.** Ustalmy dowolnie  $x \in X_{t_*}(a)$  oraz  $k \in \mathbb{N}_0$  i oznaczmy przez  $T$  zbiór wszystkich

$$t \in (\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)),$$

dla których istnieje pochodna  $x'(t)$  i ma miejsce równość

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{t}_k(f,g,\pi;t_*,\zeta^*,x)}^t \lambda(w_k(f,g,\pi;\zeta^*), x'(s)) ds = \lambda(w_k(f,g,\pi;\zeta^*), x'(t)).$$

Z twierdzenia Rademachera i twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki wynika, że

$$[\mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \mathbf{t}_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)] \setminus T$$

jest zbiorem miary zero. Korzystając ponownie z twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki, a następnie z punktu (c) lematu **6.1**, dla każdego  $t \in T$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)(t) \\ = & x'(t) + \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(t)) w_k(f, g, \pi; \zeta^*) \\ \in & \lambda(w_k(f, g, \pi; \zeta^*), x'(t)) B \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} w_k(f, g, \pi; \zeta^*), \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\| \right], \end{aligned}$$

co kończy dowód własności **4**.

Teraz możemy dokładniej sformułować problem, o którym była mowa na początku tego podrozdziału. Przyjmując dla każdego  $x \in X_{t_*}(a^*)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) \\ &= (\psi_1(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x), \psi_2(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)), \end{aligned}$$

rozważymy problem ograniczenia z góry wielkości

$$\sup_{\zeta^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)} \sup_{x \in X_{t_*}(a^*)} \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \int_{\theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^{\theta_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)} |\psi'_1(x)(t)| dt.$$

Innymi słowy chcemy oszacować z góry długość drogi jaką pokona pierwsza współrzędna trajektorii napastnika w czasie, gdy ten wykona jedno pełne okrążenie (ruchomej) strefy rażenia.

Lemat **6.1** był pierwszym z dwóch kluczowych dla całej rozprawy lematów. Następnym będzie

**Lemat 6.2.** *Dla dowolnej pary  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , dowolnego podziału  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g]$  i dowolnych  $a^*, b^* \in \mathbb{R}^2$  spełniających warunek*

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} b^* - a^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$$

*ma miejsce nierówność*

$$\sup_{\zeta^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)} \sup_{x \in X_{t_*}(a^*)} \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \int_{\theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)}^{\theta_{k+1}(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x)} |\psi'_1(x)(t)| dt \leq 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) \\ &= (\psi_1(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x), \psi_2(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x)), \end{aligned}$$

a  $\psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, \cdot) \in \Psi(a^*, b^*)$  jest strategią kierowaną ciągiem  $\{w_k(f, g, \pi; \zeta^*)\}_{k=0}^\infty$ .

**Dowód.** Ustalmy dowolne  $t_* \geq 0$  i dowolne  $a^*, b^* \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunek

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} b^* - a^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Obierzmy dowolnie  $x \in X_{t_*}(a^*)$  i upraszczając oznaczenia, przyjmijmy

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(f, g, \pi, \zeta^*) &= \mathbf{n}, \\ \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x) &= \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)), \quad z = \psi(x) - x, \\ w_k(f, g, \pi; \zeta^*) &= w_k = (w_{k,1}, w_{k,2}), \quad \theta_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x) = \theta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Obierzmy dalej dowolne  $k \in \mathbb{N}_0$ . Istnieją (patrz konstrukcja **6.1**, własność **2**) takie

$$\theta_k = t_0 < t_1 < \dots < t_{\mathbf{n}} = \theta_{k+1},$$

że

$$z(t_{j+1}) - z(t_j) = w_j = (w_{j,1}, w_{j,2}), \quad j = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1.$$

Korzystając z własności **4**, dla każdego

$$j = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1$$

i prawie wszystkich  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \psi(x)(t) \in \lambda(w_j, x'(t)) B \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} w_j, \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_j\| \right].$$

Zatem, dla każdego  $j = 0, 1, \dots, \mathbf{n}$  i prawie wszystkich  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ,

$$|\psi'_1(x)(t)| \leq \lambda(w_j, x'(t)) \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} |w_{j,1}| + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_j\| \right).$$

Skoro  $j \in \{0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1\}$  było dowolne i

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda(w_j, x'(t)) dt = 1, \quad j = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1,$$

to

$$\begin{aligned} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} |\psi'_1(x)(t)| dt &= \sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\psi'_1(x)(t)| dt \\ &\leq \sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1} \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda(w_j, x'(t)) dt \right) \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} |w_{j,1}| + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_j\| \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1} \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} |w_{j,1}| + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \|w_j\| \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1} |w_{j,1}| + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \sum_{j=0}^{\mathbf{n}-1} \|w_j\| \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} 4\ell + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \mathcal{H}^1(\text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)) \\ &= 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g). \end{aligned}$$

### 6.3. Strategia nękania

Zamierzamy wykazać, że jeżeli obrońca postanowi bronić zbyt długiego odcinka, to wektor

$$z(t) = y(t) - x(t)$$

będzie się obracał szybciej niż krążący wokół bronionego odcinka napastnik. Potrzebujemy do tego następnych dwóch lematów, z których pierwszy (pomocniczy) należy do gatunku oczywistych".

Przypominamy, że dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\omega(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

**Lemat 6.3.** Załóżmy, że  $z : [t_*, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  jest funkcją lipschitzowską i ustalmy jakiegokolwiek  $\alpha_* \in \mathbb{R}$  spełniające warunek

$$z(t_*) = \|z(t_*)\| \omega(\alpha_*).$$

Przy tych założeniach zadanie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\omega(\alpha(t)) \wedge z'(t)}{\|z(t)\|}, \quad \text{dla prawie wszystkich } t \geq t_*, \\ \alpha(t_*) &= \alpha_* \end{aligned}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i mamy

$$z(t) = \|z(t)\| \omega(\alpha(t)) \quad \text{oraz} \quad \alpha(t) = \alpha_* + \int_{t_*}^t \frac{z(s) \wedge z'(s)}{\|z(s)\|^2} ds, \quad t \geq t_*.$$

**Dowód.** Funkcja  $F$ , dana wzorem

$$F(\beta, t) = \omega(\beta) \wedge \frac{z'(t)}{\|z(t)\|}, \quad (\beta, t) \in \mathbb{R} \times [t_*, \infty),$$

jest ograniczona, mierzalna względem zmiennej  $t$  i lipschitzowska względem zmiennej  $\beta$  w każdym zbiorze postaci  $\mathbb{R} \times [t_*, t^*]$ , gdzie  $t^* > t_*$ . Ponieważ rozważamy problem

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= F(\alpha(t), t), \text{ dla prawie wszystkich } t \geq t_*, \\ \alpha(t_*) &= \alpha_*, \end{aligned}$$

to z twierdzenia Carathéodory'ego wynika istnienie tylko jednej absolutnie ciągłej funkcji

$$\alpha : [t_*, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

spełniającej żądane warunki. Zdefiniujemy

$$\zeta(t) = \|z(t)\| \omega(\alpha(t)), \quad t \geq t_*.$$

Twierdzimy, że  $\zeta = z$ . Oczywiście  $\zeta(t_*) = z(t_*)$  i dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$  mamy

$$\begin{aligned} \zeta'(t) &= \left\langle \frac{z(t)}{\|z(t)\|}, z'(t) \right\rangle \omega(\alpha(t)) + \|z(t)\| \alpha'(t) L\omega(\alpha(t)) \\ &= \left\langle z(t), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle \omega(\alpha(t)) + (\omega(\alpha(t)) \wedge z'(t)) L\omega(\alpha(t)) \\ &= \left\langle z(t), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle \omega(\alpha(t)) + \langle L\omega(\alpha(t)), z'(t) \rangle L\omega(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$ , rozwinięcie pochodnej  $z'(t)$  w ortonormalnej bazie  $\{\omega(\alpha(t)), L\omega(\alpha(t))\}$  przybiera postać

$$\begin{aligned} z'(t) &= \langle \omega(\alpha(t)), z'(t) \rangle \omega(\alpha(t)) + \langle L\omega(\alpha(t)), z'(t) \rangle L\omega(\alpha(t)) \\ &= \left\langle \zeta(t), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle \omega(\alpha(t)) + \langle L\omega(\alpha(t)), z'(t) \rangle L\omega(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$  mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\zeta(t) - z(t)\| &\leq \|\zeta'(t) - z'(t)\| = \left\| \left\langle z(t) - \zeta(t), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle \right\| \\ &\leq \|\zeta(t) - z(t)\| \frac{\text{Lip } z}{\|z(t)\|}. \end{aligned}$$

Stosując nierówność Gronwalla, dla każdego  $t \geq t_*$  otrzymujemy

$$\|\zeta(t) - z(t)\| \leq \left( \exp \int_{t_*}^t \frac{\text{Lip } z}{\|z(s)\|} ds \right) \|\zeta(t_*) - z(t_*)\| = 0.$$

Sformułujemy teraz drugi z zapowiadanych lematów. Ustalmy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , dowolny podział  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g]$ , dowolne  $t_* \geq 0$  i dowolne  $a^*, b^* \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunek

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} b^* - a^* \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Weźmy dowolne  $x \in X_{t_*}(a^*)$  i przyjmijmy (patrz konstrukcja **6.1**)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{n}(f, g, \pi, \zeta^*), \\ w_k &= w_k(f, g, \pi; \zeta^*), \quad \mathbf{t}_k = \mathbf{t}_k(f, g, \pi; t_*, \zeta^*, x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ y &= \psi(f, g, \pi; t_*, a^*, b^*, x), \quad z = y - x. \end{aligned}$$

Zgodnie z lematem **6.3**, istnieje taka absolutnie ciągła funkcja  $\alpha : [t_*, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$\zeta^* = \|\zeta^*\| \omega(\alpha(t_*))$$

i dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$ ,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left\langle L\omega(\alpha(t)), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle, \\ z(t) &= \|z(t)\| \omega(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Oszacujemy (od dołu) prędkość kąta  $\alpha(t)$ , czyli pochodną  $\alpha'(t)$ . Przyjmijmy

$$r_0 = \min_{\xi \in \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)} \|\xi\|, \quad \mu^+ = \max_{k=0,1,\dots,\mathbf{n}-1} \|w_k\|$$

oraz (patrz. definicja **3.5**)

$$\mathbf{k}(f, g, \pi) = \frac{(\sigma - \rho) \mathbf{c}(f, g, \pi)}{\mu^+ r_0^2}.$$

Oczywiście ma miejsce nierówność

$$\mathbf{k}(f, g, \pi) > 0.$$

**Lemat 6.4.** *Przy powyższych założeniach dla prawie wszystkich  $t \geq t_*$  mamy*

$$\alpha'(t) \geq \mathbf{k}(f, g, \pi).$$

**Dowód.** Wystarczy wykazać, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}_0$  i prawie wszystkich  $t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}]$  ma miejsce nierówność

$$\alpha'(t) \geq \mathbf{k}(f, g, \pi).$$

Ustalmy wobec tego dowolne  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dla prawie wszystkich  $t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}]$  mamy

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left\langle L\omega(\alpha(t)), \frac{z'(t)}{\|z(t)\|} \right\rangle = \left\langle L \frac{z(t)}{\|z(t)\|}, \frac{\lambda(w_k, x'(t)) w_k}{\|z(t)\|} \right\rangle \\ &= \frac{\lambda(w_k, x'(t))}{\|z(t)\|^2} \langle Lz(t), w_k \rangle, \end{aligned}$$

a poza tym (patrz punkt (a) lematu **6.1**)

$$\frac{\lambda(w_k, x'(t))}{\|z(t)\|^2} \geq \frac{\sigma - \rho}{\|w_k\| \|z(t)\|^2} \geq \frac{\sigma - \rho}{\mu^+ r_0^2}.$$

Ponieważ (patrz lemat **3.3**) dla  $t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}]$  mamy

$$\langle Lz(t), w_k \rangle \geq \mathbf{c}(f, g, \pi),$$

to prawie wszystkich  $t \in [\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_{k+1}]$  będzie

$$\alpha'(t) \geq \frac{\sigma - \rho}{\mu + r_0^2} \mathbf{c}(f, g, \pi) = \mathbf{k}(f, g, \pi).$$

**Konstrukcja 6.2.** Ustalamy dowolną parę  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ , dowolny podział  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[f, g]$  i dowolne  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniające warunki:

$$b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b - a \notin \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g).$$

Zdefiniujemy funkcję nieantycypującą

$$\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot) : X(a) \rightarrow Y(b),$$

którą nazwiemy strategią nękania.

**Etap 1.** Próba ataku bezpośredniego. Ustalmy dowolne  $x \in X(a)$ . Ponieważ  $b \neq 0$ , to możemy zdefiniować

$$\begin{aligned} y^{\mathbf{A}}(t) &= b - \frac{\sigma t}{\|b\|} b, \quad t \geq 0, \\ \tau_{\mathbf{A}}(b) &= \frac{\|b\|}{\sigma}, \\ \mathbf{T}_0(x) &= \left\{ t \geq 0 : y^{\mathbf{A}}(t) - x(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) \right\}, \\ \tau_0(x) &= \begin{cases} \infty, & \text{gdy } \mathbf{T}_0(x) = \emptyset, \\ \min \mathbf{T}_0(x), & \text{gdy } \mathbf{T}_0(x) \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Bezpośredni atak może być skuteczny tylko w przypadku

$$\tau_{\mathbf{A}}(b) \leq \tau_0(x), \tag{6.1}$$

bo wtedy

$$y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b)) = (0, 0) \in (-\mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g), \mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)) \times \{0\}$$

oraz

$$y^{\mathbf{A}}(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g), \quad t \in [0, \tau_{\mathbf{A}}(b)).$$

Dlatego przypadek

$$\tau_{\mathbf{A}}(b) > \tau_0(x) \tag{6.2}$$

rozważymy w następnym etapie konstrukcji, a teraz zajmijmy się przypadkiem (6.1). Niech

$$\hat{y}(b) \in x(\tau_{\mathbf{A}}(b)) + \text{bd } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$$

będzie rzutem punktu  $y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b))$  (czyli punktu 0) na zbiór  $x(\tau_{\mathbf{A}}(b)) + \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)$ . Trajektorię  $\psi(f, g, \pi; a, b, x)$  definiujemy wzorem:

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) = \begin{cases} y^{\mathbf{A}}(t), & \text{gdy } t \in [0, \tau_{\mathbf{A}}(b)], \\ \sigma(t - \tau_{\mathbf{A}}(b))q, & \text{gdy } t \in [\tau_{\mathbf{A}}(b), \infty), \end{cases}$$

gdzie wektor

$$q \in S^1 \cap \mathbf{N}_{x(\tau_{\mathbf{A}}(b)) + \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)}(\hat{y}(b)) \tag{6.3}$$

jest dobierany opisanym niżej sposobem. Jeżeli  $\tau_{\mathbf{A}}(b) < \tau_0(x)$ , to  $\hat{y}(b) \neq 0$ . Przyjmujemy wtedy

$$q = -\frac{\hat{y}(b)}{\|\hat{y}(b)\|}.$$

Natomiast, jeżeli  $\hat{y}(b) = 0$ , to wybieramy jakiegokolwiek (patrz definicja **1.3**)

$$q \in S^1 \cap \mathbf{N}_{x(\tau_{\mathbf{A}}(b)) + \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g)}(\hat{y}(b)).$$

**Etap 2.** Krążenie po brzegu strefy rażenia wraz z ewentualnym wykorzystaniem nadarzającej się okazji. Mamy teraz do czynienia z przypadkiem (6.2). Niech (patrz konstrukcja **6.1**)

$$\begin{aligned} & \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \psi \left( f, g, \pi; \tau_0 \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right), x \left( \tau_0 \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \right), y^{\mathbf{A}} \left( \tau_0 \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \right), x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \end{aligned}$$

będzie strategią kierowaną ciągiem

$$\left\{ w_k \left( f, g, \pi; y^{\mathbf{A}} \left( \tau_0 \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \right) - x \left( \tau_0 \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) \right) \right) \right\}_{k=0}^{\infty}.$$

Przyjmujemy (patrz definicja **1.3**)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(x) &= \left\{ t \geq \tau_0(x) : -\psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (t) \in \mathbf{N}_{\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g)} \left( \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (t) - x(t) \right) \right\}, \\ \tau_1(x) &= \begin{cases} \infty, & \text{gdy } \mathbf{T}_1(x) = \emptyset, \\ \min \mathbf{T}_1(x), & \text{gdy } \mathbf{T}_1(x) \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Dalsza część definicji trajektorii  $\psi(f, g, \pi; a, b, x)$  zależy od dwóch możliwych przypadków.

Jeżeli  $\tau_1(x) = \infty$ , to przyjmujemy

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) = \begin{cases} y^{\mathbf{A}}(t), & \text{gdy } t \in [0, \tau_0(x)], \\ \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (t), & \text{gdy } t \in [\tau_0(x), \infty). \end{cases}$$

Jeżeli  $\tau_1(x) < \infty$ , to przyjmujemy

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) = \begin{cases} y^{\mathbf{A}}(t), & \text{gdy } t \in [0, \tau_0(x)], \\ \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (t), & \text{gdy } t \in [\tau_0(x), \tau_1(x)] \end{cases}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \\ &= \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (\tau_1(x)) - \sigma(t - \tau_1(x)) \frac{\psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (\tau_1(x))}{\left\| \psi^{\mathbf{K}} \left( x|_{[\tau_0(x), \infty)} \right) (\tau_1(x)) \right\|}, \quad t \in [\tau_1(x), \infty). \end{aligned}$$

**Etap 3.** Własności

**1.**  $\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot) \in \Psi(a, b)$  oraz

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g), \quad t \geq 0.$$



2. Jeżeli  $\tau_{\mathbf{A}}(b) \leq \tau_0(x)$  lub  $\tau_{\mathbf{A}}(b) > \tau_0(x)$  i  $\tau_1(x) < \infty$ , to istnieje takie  $t^* > 0$ , że

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t^*) = 0.$$

**Dowód własności 1.** We wszystkich przypadkach dla każdego  $x \in X(a)$  i dla prawie wszystkich  $t \geq 0$  mamy

$$\left\| \frac{d}{dt} \psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \right\| \leq \sigma,$$

więc

$$\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot) : X(a) \rightarrow Y(b).$$

Poza tym  $\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot)$  jest funkcją nieantycypującą, więc  $\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot) \in \Psi(a, b)$ .

Warunek

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g), \quad t \geq 0,$$

wymaga dowodu w przypadkach:

- (a)  $\tau_{\mathbf{A}}(b) \leq \tau_0(x)$ ,
- (b)  $\tau_{\mathbf{A}}(b) > \tau_0(x)$  i  $\tau_1(x) < \infty$ .

Przypadek (a). Wystarczy dowieść warunku

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g), \quad t \geq \tau_{\mathbf{A}}(b).$$

Twierdzymy, że

$$\langle \psi(f, g, \pi; a, b, x)(\tau_{\mathbf{A}}(b)) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \geq 0.$$

Istotnie, jeżeli  $\hat{y}(b) \neq 0$ , to (patrz warunek (6.3))

$$q = -\frac{\hat{y}(b)}{\|\hat{y}(b)\|} \in \mathbf{N}_{x(\tau_{\mathbf{A}}(b)) + \mathbf{C}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g)}(\hat{y}(b)),$$

więc

$$\langle \hat{y}(b) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \geq 0$$

i w rezultacie

$$\begin{aligned} & \langle \psi(f, g, \pi; a, b, x)(\tau_{\mathbf{A}}(b)) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \\ &= \langle y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b)) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle = \langle 0 - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \\ &= \langle -\hat{y}(b) + \hat{y}(b) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle = \|\hat{y}(b)\| + \langle \hat{y}(b) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \\ &\geq \|\hat{y}(b)\| > 0. \end{aligned}$$

Natomiast, jeżeli  $\hat{y}(b) = 0$ , to  $y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b)) = \hat{y}(b)$ , więc

$$\begin{aligned} & \langle \psi(f, g, \pi; a, b, x)(\tau_{\mathbf{A}}(b)) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \\ &= \langle y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b)) - x(\tau_{\mathbf{A}}(b)), q \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ dla prawie wszystkich  $t \geq \tau_{\mathbf{A}}(b)$  mamy

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) - x(t), q \rangle = \langle \sigma q - x'(t), q \rangle = \sigma - \langle x'(t), q \rangle \geq \sigma - \rho > 0,$$

to dla każdego  $t \geq \tau_{\mathbf{A}}(b)$  musi być

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g).$$

**Dowód własności 2.** Jeżeli  $\tau_{\mathbf{A}}(b) \leq \tau_0(x)$ , to przyjmując

$$t^* = \tau_{\mathbf{A}}(b)$$

otrzymujemy

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t^*) = y^{\mathbf{A}}(\tau_{\mathbf{A}}(b)) = 0.$$

Jeżeli  $\tau_{\mathbf{A}}(b) > \tau_0(x)$  i  $\tau_1(x) < \infty$ , to przyjmując

$$t^* = \tau_1(x) + \frac{\|\psi^{\mathbf{K}}(x_{|\tau_0(x), \infty}) (\tau_1(x))\|}{\sigma},$$

też otrzymujemy

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t^*) = 0.$$

**Twierdzenie 6.1.** Załóżmy, że  $(f, g) \in \mathbf{W}[\ell]$ ,  $\pi \in \Pi_{\mathbf{AD}}[\ell]$  i  $\mathfrak{L}^* > \mathfrak{L}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g)$ . Przy tych założeniach, jeżeli  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniają warunki

$$b \neq 0 \text{ oraz } b - a \notin \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g),$$

to (patrz punkt (b) definicji 4.4)  $\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot)$  jest strategią skutecznego ataku odcinka

$$[-\mathfrak{L}^*, \mathfrak{L}^*] \times \{0\}.$$

**Dowód.** Dla każdego  $x \in X(a)$  (patrz etap 3 konstrukcji 6.2)

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin x(t) + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi}f, \mathcal{L}_{\pi}g), \quad t \geq 0.$$

Należy zatem wykazać, że dla każdego  $x \in X(a)$  istnieje  $t^* \geq 0$  o tej własności, że

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t^*) \in [-\mathfrak{L}^*, \mathfrak{L}^*] \times \{0\}.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego  $x \in X(a)$  mamy

$$\psi(f, g, \pi; a, b, x)(t) \notin [-\mathfrak{L}^*, \mathfrak{L}^*] \times \{0\}, \quad t \geq 0. \quad (6.4)$$

Wykażemy, że takie założenie prowadzi do sprzeczności. Upraszczając oznaczenia, przyjmijmy

$$y = (y_1, y_2) = \psi(f, g, \pi; a, b, x), \quad \tau_{\mathbf{A}} = \tau_{\mathbf{A}}(b), \quad \tau_1 = \tau_1(x), \quad \tau_0 = \tau_0(x).$$

Przyjmijmy jeszcze

$$z = y - x.$$

Z warunku (6.4) wynika (patrz konstrukcja 6.2, własność 2), że

$$\tau_{\mathbf{A}} > \tau_0 \text{ oraz } \tau_1 = \infty.$$

Dla każdego  $t \geq \tau_0$  mamy zatem

$$y(t) = \psi^{\mathbf{K}}(x|_{[\tau_0, \infty)})(t)$$

oraz

$$-y(t) \notin \mathbf{N}_{\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi f}, \mathcal{L}_{\pi g})}(y(t) - x(t)) = \mathbf{N}_{\mathbf{C}(\mathcal{L}_{\pi f}, \mathcal{L}_{\pi g})}(z(t)). \quad (6.5)$$

Ponieważ

$$z(t) \neq 0, \quad y(t) \neq 0, \quad t \geq \tau_0,$$

to z lematu **6.3** wynika istnienie takich absolutnie ciągłych funkcji

$$\alpha, \beta : [\tau_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

że

$$z(t) = \|z(t)\| \omega(\alpha(t)), \quad y(t) = \|y(t)\| \omega(\beta(t)), \quad t \geq \tau_0.$$

Z warunku (6.5) i lematu **1.3** wynika warunek

$$\sup_{t \geq \tau_0} \{\alpha(t) - \beta(t)\} < \infty.$$

Z kolei z lematu **6.4** wynika równość

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty,$$

więc musi być też

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \infty.$$

Warunek (6.4) i stwierdzone wyżej własności funkcji  $\alpha, \beta$  umożliwiają zdefiniowanie trzech ciągów:

$$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \{t_k^*\}_{k=0}^{\infty} \quad \text{oraz} \quad \{s_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}.$$

Przyjmujemy

$$t_0 = \min \{t \geq \tau_0 : y_1(t) \geq \mathfrak{L}^*, y_2(t) = 0\},$$

a dla każdego  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} t_k^* &= \min \{t \geq t_k : y_1(t) \leq -\mathfrak{L}^*, y_2(t) = 0\}, \\ t_{k+1} &= \min \{t \geq t_k^* : y_1(t) \geq \mathfrak{L}^*, y_2(t) = 0\}, \\ s_{k+1} &= \min \{t \geq t_k : \alpha(t) = \alpha(t_k) + 2\pi\}. \end{aligned}$$

Dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  mamy

$$\alpha(s_{k+1}) - \alpha(t_k) = \beta(t_{k+1}) - \beta(t_k) = 2\pi$$

oraz

$$|y_1(t_k^*) - y_1(t_k)| + |y_1(t_{k+1}) - y_1(t_k^*)| \geq 2\mathfrak{L}^* + 2\mathfrak{L}^* = 4\mathfrak{L}^* > 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_{\pi f}, \mathcal{L}_{\pi g}).$$

Przyjmijmy

$$\Delta = 4\mathfrak{L}^* - 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_{\pi f}, \mathcal{L}_{\pi g}).$$

Z lematu **6.2** wynika, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  ma miejsce nierówność

$$\int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt \leq 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_{\pi f}, \mathcal{L}_{\pi g}).$$

Ustalmy dowolnie  $k \in \mathbb{N}$ . Mamy

$$\begin{aligned}
& \int_{t_k}^{t_{k+1}} |y_1'(t)| dt - \int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt \\
&= \int_{t_k}^{t_k^*} |y_1'(t)| dt + \int_{t_k^*}^{t_{k+1}} |y_1'(t)| dt - \int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt \\
&\geq \left| \int_{t_k}^{t_k^*} y_1'(t) dt \right| + \left| \int_{t_k^*}^{t_{k+1}} y_1'(t) dt \right| - \int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt \\
&= |y_1(t_k^*) - y_1(t_k)| + |y_1(t_{k+1}) - y_1(t_k^*)| - \int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt \\
&\geq 4\mathfrak{L}^* - 4\mathfrak{L}(\mathcal{L}_\pi f, \mathcal{L}_\pi g) = \Delta > 0,
\end{aligned}$$

więc  $t_{k+1} \geq s_{k+1}$ . Zatem

$$\Delta \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |y_1'(t)| dt - \int_{t_k}^{s_{k+1}} |y_1'(t)| dt = \int_{s_{k+1}}^{t_{k+1}} |y_1'(t)| dt \leq \int_{s_{k+1}}^{t_{k+1}} \sigma dt = \sigma(t_{k+1} - s_{k+1})$$

i w rezultacie

$$t_{k+1} - s_{k+1} \geq \frac{\Delta}{\sigma} > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Stąd, na mocy lematu **6.4**,

$$\begin{aligned}
\alpha(t_{k+1}) - \alpha(s_{k+1}) &= \int_{s_{k+1}}^{t_{k+1}} \alpha'(t) dt \geq \int_{s_{k+1}}^{t_{k+1}} \mathbf{k}(f, g, \pi) dt \\
&= \mathbf{k}(f, g, \pi)(t_{k+1} - s_{k+1}) \geq \frac{\Delta}{\sigma} \mathbf{k}(f, g, \pi) > 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ  $k \in \mathbb{N}$  było dowolne, to dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_1) &= \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j)) = \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(s_{j+1}) + \alpha(s_{j+1}) - \alpha(t_j)) \\
&= \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(s_{j+1}) + 2\pi) \\
&= \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(s_{j+1}) + \beta(t_{j+1}) - \beta(t_j)) \\
&= \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(s_{j+1})) + \sum_{j=1}^k (\beta(t_{j+1}) - \beta(t_j)) \\
&= \sum_{j=1}^k (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(s_{j+1})) + \beta(t_{k+1}) - \beta(t_1) \\
&\geq k \frac{\Delta}{\sigma} \mathbf{k}(f, g, \pi) + \beta(t_{k+1}) - \beta(t_1).
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha(t_k) - \beta(t_k)) = \infty,$$

co przeczy stwierdzonemu wcześniej warunkowi

$$\sup_{t \geq \tau_0} \{\alpha(t) - \beta(t)\} < \infty.$$

**Wniosek 6.1.** Jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ , to

$$\begin{aligned} \text{val } \mathcal{G}(f, g) &= 2\mathfrak{L}(f, g) \\ &= \frac{2\ell\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \left( f(-\ell) + f(\ell) + \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau \right). \end{aligned}$$

**Dowód.** Wystarczy (patrz wniosek 5.1) dowieść nierówności

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \leq 2\mathfrak{L}(f, g).$$

Obierzmy dowolne  $\mathfrak{L}^* > \mathfrak{L}(f, g)$ . Mamy (patrz definicje 2.4 i 4.5)

$$\begin{aligned} \kappa(f, g) &= \frac{2\rho + \sigma}{\rho} \left( \mathfrak{L}(f, g) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \Lambda(f, g) \right) \\ &> 4\mathfrak{L}(f, g) + \Lambda(f, g) \\ &> 4\ell + \Lambda(f, g) \end{aligned}$$

oraz

$$\max_{z \in \mathbf{C}(f, g)} \|z\| \leq \ell + \frac{1}{2} \Lambda(f, g),$$

bo dla każdego  $z \in \mathbf{C}(f, g)$

$$\|z\| \leq \ell + \min \{ \|z - (\ell, 0)\|, \|z - (-\ell, 0)\| \} \leq \ell + \frac{1}{2} \Lambda(f, g).$$

Zatem

$$\mathbf{C}(f, g) \subset B \left[ 0, \ell + \frac{1}{2} \Lambda(f, g) \right] \subset B(0, \kappa(f, g)).$$

Korzystając z lematu 3.1 możemy teraz dobrać takie  $\varkappa > 1$ , taki podział  $\pi \in \Pi[\ell]$  i taką parę  $(f^\varkappa, g^\varkappa) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell]$ , że

$$\mathbf{C}(f, g) \subset \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)) \subset \varkappa \mathbf{C}(f, g) \subset B(0, \kappa(f, g)).$$

oraz

$$\mathfrak{L}(f, g) < \sqrt{\varkappa} \mathfrak{L}(f, g) \leq \mathfrak{L}(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)) \leq \varkappa \mathfrak{L}(f, g) \leq \mathfrak{L}^*.$$

W takim razie, jeżeli pozycje początkowe  $a, b \in \mathbb{R}^2$  spełniają warunek

$$\|b\| \geq \kappa(f, g) + \frac{2\sigma}{\rho} \|a\|,$$

to

$$\|b - a\| \geq \|b\| - \|a\| \geq \kappa(f, g) + \left( \frac{2\sigma}{\rho} - 1 \right) \|a\| > \kappa(f, g)$$

i w rezultacie

$$b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b \notin a + \text{int } \mathbf{C}(\mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi f^\varkappa), \mathcal{J}_\varkappa(\mathcal{L}_\pi g^\varkappa)).$$

Z twierdzenia 6.1 wynika, że dla takich pozycji początkowych  $a, b \in \mathbb{R}^2$  istnieje strategia

$$\psi(f, g, \pi; a, b, \cdot) \in \Psi[f, g, \mathfrak{L}^*, a, b]$$

będąca strategią skutecznego ataku odcinka

$$[-\mathfrak{L}^*, \mathfrak{L}^*] \times \{0\}.$$

Stąd, wobec dowolności  $\mathfrak{L}^* > \mathfrak{L}(f, g)$ , otrzymujemy żadaną nierówność

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) \leq 2\mathfrak{L}(f, g).$$

**Uwaga 6.1.** Cena gry  $\mathcal{G}(f, g)$  zależy od proporcji  $\theta = \frac{\sigma}{\rho}$ , bo

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{L}(f, g) &= \frac{2\sigma^2\ell}{\sigma^2 - \rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \mathcal{H}^1(\text{bd } \mathbf{C}(f, g)) \\ &= \frac{2\theta^2\ell}{\theta^2 - 1} + \frac{1}{2} \frac{\theta}{\theta^2 - 1} \mathcal{H}^1(\text{bd } \mathbf{C}(f, g)). \end{aligned}$$

Podsumowaniem rozważań z przykładów **2.2** i **3.7** jest (patrz przykład **5.1**)

**Przykład 6.1.** Zgodnie z wnioskiem **6.1**, jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[2]$  jest parą z przykładu **2.2**, to

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) = 12,$$

a jeżeli  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[14]$  jest parą z przykładu **3.7**, to

$$\begin{aligned} \text{val } \mathcal{G}(f, g) &= \frac{171}{4} = 42,75, \quad \text{gdy } \rho = 1, \sigma = 3, \\ \text{val } \mathcal{G}(f, g) &= \frac{1300}{9} \approx 144,44, \quad \text{gdy } \rho = 1, \sigma = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

**Uwaga 6.2.** Twierdzenie **2.7**, będące głównym wynikiem pracy [12], jest szczególnym przypadkiem wniosku **6.1**. Wystarczy przyjąć

$$\ell = r, \quad \theta = \frac{\sigma}{\rho},$$

$$f(\tau) = \sqrt{\ell^2 - \tau^2}, \quad g(\tau) = -\sqrt{\ell^2 - \tau^2}, \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

## 7. Obrona odcinka. Zakończenie

### 7.1. Zbiory przydatne do obrony odcinków

Rozważaliśmy problem obrony odcinków położonych na osi odciętych, postaci

$$[-\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \times \{0\}.$$

Poza tym rozważaliśmy strefy rażenia o pewnych szczególnych, wymienionych nieco niżej, własnościach. Wyznaczenie ceny gry w przypadku dowolnie położonych odcinków i dowolnej strefy rażenia pozostaje problemem otwartym. Wyznaczenie ceny gry w rozważanym w rozprawie przypadku, ale z wieloma obrońcami mogącymi się poruszać swobodnie po całej płaszczyźnie, też pozostaje problemem otwartym. Analogiczne problemy stają się znacznie trudniejsze kiedy trajektorie graczy są rozwiązaniami ogólnych równań różniczkowych ze sterowaniem. W tym rozdziale zajmujemy się (raczej oczywistym) uogólnieniem wniosku **6.1**. Dalsze rozważania poprzedzimy trzema obserwacjami.

Założmy, że  $(f, g) \in W_{\mathbf{OBR}}[\ell]$  i przyjmijmy

$$z^+ = (\ell, 0), \quad z^- = (-\ell, 0), \quad q = \frac{z^+ - z^-}{\|z^+ - z^-\|}.$$

**Obserwacja 1.** Punkty  $z^+$  i  $z^-$  dzielą obwód zbioru  $\mathbf{C}(f, g)$  na pół.

**Obserwacja 2.** Mają miejsce relacje (patrz definicja **1.1**)

$$z^+ \in \mathbf{C}(f, g)(q) \quad \text{oraz} \quad z^- \in \mathbf{C}(f, g)(-q),$$

a poza tym

$$\mathbb{K}_{\mathbf{C}(f, g)}(\pm q) = 2\ell.$$

**Obserwacja 3.** Formuła wyznaczająca cenę gry we wniosku **6.1** przybiera postać

$$\text{val } \mathcal{G}(f, g) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \mathbb{K}_{\mathbf{C}(f, g)}(\pm q) + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \mathcal{H}^1(\text{bd } \mathbf{C}(f, g)),$$

gdzie

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Celem obserwacji **3** jest zwrócenie uwagi na geometryczną interpretację ceny gry. Z kolei dwie pierwsze obserwacje zawierają te własności strefy rażenia  $\mathbf{C}(f, g)$ , które umożliwiły wyznaczenie ceny gry.

Przed definicją nieco ogólniejszej strefy rażenia wprowadzimy oznaczenie dla domkniętego łuku leżącego na brzegu zbioru wypukłego. Każde dwa różne punkty leżące na brzegu zwartego zbioru wypukłego  $D \subset \mathbb{R}^2$  o niepustym wnętrzu dzielą brzeg zbioru  $D$  na dwa łuki o wspólnych końcach. Założmy, że  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zwartym zbiorem wypukłym i

$$\text{int } D \neq \emptyset.$$

Założmy dalej, że  $z_1, z_2 \in \text{bd } D$  i  $z_1 \neq z_2$ . Unikając parametryzacji brzegu zbioru  $D$ , przyjmijmy (patrz oznaczenia w podrozdziale **1.1**)

$$[z_1, z_2]_D = \{z \in \text{bd } D : (z - z_1) \wedge (z_2 - z_1) \geq 0\}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} [z_1, z_2]_D &\neq [z_2, z_1]_D, \\ [z_1, z_2]_D \cup [z_2, z_1]_D &= \text{bd } D \text{ oraz } [z_1, z_2]_D \cap [z_2, z_1]_D = \{z_1, z_2\}. \end{aligned}$$

W związku z tym

$$\mathcal{H}^1([z_1, z_2]_D) + \mathcal{H}^1([z_2, z_1]_D) = \mathcal{H}^1(\text{bd } D).$$

Poza tym, jeżeli  $[z_1, z_2] \subset \text{bd } D$ , to

$$[z_1, z_2]_D = [z_1, z_2] \text{ albo } [z_2, z_1]_D = [z_1, z_2].$$

**Definicja 7.1.** Niech będzie dany zwarty i wypukły zbiór  $D \subset \mathbb{R}^2$  spełniający warunek

$$0 \in \text{int } D.$$

Powiemy, że  $D$  jest zbiorem przydatnym do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$ , gdzie  $q = \omega(\beta) \in S^1$ , jeżeli istnieją takie punkty

$$z^+ \in D(q) \text{ oraz } z^- \in D(-q),$$

że

$$z^- = -z^+, \frac{z^+}{\|z^+\|} = q \text{ oraz } \mathcal{H}^1([z^+, z^-]_D) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D).$$

### Przykłady

**7.1.** Koło  $B[0, r]$ , gdzie  $r > 0$ , jest przydatne do obrony odcinków o każdym kierunku  $\pm q$ ,  $q \in S^1$ .

**7.2.** Jeżeli  $q \in S^1$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem zwartym, wypukłym, symetrycznym względem prostej

$$\{\lambda q : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

a odcinek

$$D \cap \{\lambda q : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest symetryczny względem punktu 0, to zbiór  $D$  jest przydatny do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$ .

**7.3.** Jeżeli  $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  spełniają warunek  $\|a\| = \|b\|$  i nie są współliniowe, to romb

$$\mathcal{R}(a, b) = \text{conv} \{a + b, -a - b, a - b, b - a\}$$

jest zbiorem przydatnym do obrony odcinków o kierunkach:

$$\pm \frac{a+b}{\|a+b\|}, \pm \frac{a-b}{\|a-b\|}, \pm L \frac{a}{\|a\|}, \pm L \frac{b}{\|b\|}.$$

W szczególności, dla

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{24}{5} \end{bmatrix},$$

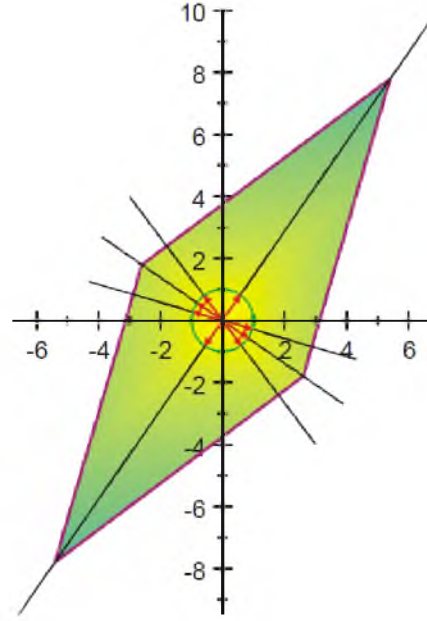
otrzymujemy

$$\mathcal{R}(a, b) = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{27}{5} \\ \frac{39}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{27}{5} \\ -\frac{39}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \right\}$$



i romb  $\mathcal{R}(a, b)$  jest zbiorem przydatnym do obrony odcinków o kierunkach:

$$\pm \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{10}}{50} \\ \frac{13\sqrt{10}}{50} \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} -\frac{13\sqrt{10}}{50} \\ \frac{9\sqrt{10}}{50} \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} -\frac{24}{25} \\ \frac{7}{25} \end{bmatrix}.$$



**Rys. 7.1.** Romb  $\mathcal{R}(a, b)$  i wyróżnione kierunki.

Każdemu zbiorowi przydatnemu do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$  przyporządkujemy parę wypukłą  $(f, g)$  przydatną do obrony odcinków o kierunku  $\pm(1, 0)$ .

**Lemat 7.1.** Załóżmy, że  $D$  jest zbiorem przydatnym do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$ , gdzie  $q = \omega(\beta) \in S^1$ , a punkty

$$z^+ \in D(q), \quad z^- \in D(-q)$$

spełniają warunki

$$z^- = -z^+, \quad \frac{z^+}{\|z^+\|} = q \quad \text{oraz} \quad \mathcal{H}^1([z^+, z^-]_D) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D).$$

Przyjmijmy

$$\ell = \frac{1}{2} \mathbb{k}_D(\pm q)$$

i dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  zdefiniujmy

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \max \{ \mu \in \mathbb{R} : \tau q + \mu Lq \in D \}, \\ g(\tau) &= \min \{ \mu \in \mathbb{R} : \tau q + \mu Lq \in D \}. \end{aligned}$$

Przy tych założeniach

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell] \quad \text{oraz} \quad D = \mathcal{O}_\beta(\mathbf{C}(f, g)).$$

**Dowód.** Dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  zdefiniujemy

$$M(\tau) = \{\mu \in \mathbb{R} : \tau q + \mu Lq \in D\}.$$

Ponieważ  $D$  jest zbiorem zwartym i

$$\{\tau q : \tau \in [-\ell, \ell]\} = [z^-, z^+] \subset D,$$

to dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  zbiór  $M(\tau)$  jest zwarty i niepusty. Definicje obu funkcji  $f$  i  $g$  są zatem poprawne i mamy

$$g(\tau) \leq 0 \leq f(\tau), \quad \tau \in [-\ell, \ell].$$

Wypukłość funkcji  $g$ . Załóżmy, że

$$-\ell \leq \tau' < \tau'' \leq \ell \quad \text{oraz} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ponieważ

$$\tau' q + g(\tau') Lq \in D, \quad \tau'' q + g(\tau'') Lq \in D,$$

a  $D$  jest zbiorem wypukłym, to

$$\begin{aligned} & ((1 - \lambda) \tau' + \lambda \tau'') q + ((1 - \lambda) g(\tau') + \lambda g(\tau'')) Lq \\ &= (1 - \lambda) (\tau' q + g(\tau') Lq) + \lambda (\tau'' q + g(\tau'') Lq) \in D. \end{aligned}$$

Z definicji funkcji  $g$  wynika wobec tego nierówność

$$g((1 - \lambda) \tau' + \lambda \tau'') \leq (1 - \lambda) g(\tau') + \lambda g(\tau'').$$

Nierówność  $g(0) < 0$ . Ponieważ  $g$  jest funkcją wypukłą, to

$$\max_{\tau \in [-\ell, \ell]} g(\tau) = \max\{g(-\ell), g(\ell)\} \leq 0.$$

Gdyby było  $g(0) = 0$ , to mielibyśmy  $g = 0$ . Oznaczałoby to relację

$$[z^-, z^+] \subset \text{bd } D.$$

Mielibyśmy wówczas

$$\|z^+ - z^-\| = \mathbb{k}_D(\pm q) = 2\ell = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D),$$

co jest możliwe jedynie wtedy, gdy

$$D = [z^-, z^+].$$

Ciągłość funkcji  $g$ . Wystarczy dowieść ciągłości funkcji  $g$  w punktach  $-\ell$  i  $\ell$ , bo w przedziale otwartym  $(-\ell, \ell)$  funkcja wypukła  $g$  jest ciągła. Ponieważ

$$[-\ell, \ell] \ni \tau \mapsto M(\tau) \subset \mathbb{R}$$

jest multifunkcją górnio półciągłą, to

$$g(-\ell) = \min M(-\ell) \leq \liminf_{\tau \downarrow -\ell} \min M(\tau) = \liminf_{\tau \downarrow -\ell} g(\tau).$$

Zauważmy, że nie może być

$$g(-\ell) < \limsup_{\tau \downarrow -\ell} g(\tau).$$

Istotnie, w przeciwnym razie istniałby taki ściśle malejący ciąg

$$\tau_k \in (-\ell, \ell), \quad k \in \mathbb{N},$$

że

$$g_D(-\ell) < \lim_{k \rightarrow \infty} g(\tau_k).$$

Byłoby zatem (patrz [20], twierdzenie 1, s 39)

$$\frac{g(\ell) - g(-\ell)}{2\ell} = \frac{g(\ell) - g(-\ell)}{\ell - (-\ell)} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(\tau_k) - g(-\ell)}{\tau_k + \ell} = \infty.$$

W rezultacie

$$\limsup_{\tau \downarrow -\ell} g(\tau) \leq g(-\ell) \leq \liminf_{\tau \downarrow -\ell} g(\tau),$$

czyli

$$g(-\ell) = \lim_{\tau \downarrow -\ell} g(\tau).$$

Podobnie dowodzimy równości

$$g(\ell) = \lim_{\tau \uparrow \ell} g(\tau).$$

Stosując podobne rozumowania dowodzimy wklęsłości i ciągłości funkcji  $f$  oraz warunku  $f(0) > 0$ . Zatem

$$(f, g) \in \mathbf{W}[\ell].$$

Ponieważ (patrz definicja 2.4)

$$[z^+, z^-]_D = [z^+, (\Gamma f)(\ell)] \cup (\Gamma f)[- \ell, \ell] \cup [(\Gamma f)(-\ell), z^-],$$

to

$$\mathcal{H}^1([z^+, z^-]_D) = f(\ell) + \mathcal{H}^1((\Gamma f)([-\ell, \ell])) + f(-\ell) = \Lambda(f).$$

Z analogicznych powodów

$$\mathcal{H}^1([z^-, z^+]_D) = \Lambda(g),$$

więc

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\mathbf{OBR}}[\ell].$$

Dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  i każdego  $\mu \in \mathbb{R}$  mamy

$$(\tau, \mu) \in \mathbf{C}(f, g) \Leftrightarrow \tau q + \mu Lq \in D$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\beta(\tau, \mu) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \cos \beta - \mu \sin \beta \\ \tau \sin \beta + \mu \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \tau \omega(\beta) + \mu L \omega(\beta) = \tau q + \mu Lq,\end{aligned}$$

więc

$$\mathcal{O}_\beta \mathbf{C}(f, g) = D.$$

## 7.2. Obrona odcinka

Założmy, że  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem przydatnym do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$ , gdzie  $q = \omega(\beta)$ , a punkty  $z^-, z^+ \in \text{bd } D$  spełniają warunki:

$$\begin{aligned}z^- &\in D(-q), \quad z^+ \in D(q), \quad z^- = -z^+, \quad \frac{z^+}{\|z^+\|} = q, \\ \mathcal{H}^1([z^-, z^+]_D) &= \mathcal{H}^1([z^+, z^-]_D) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D).\end{aligned}$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{[D, q]} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \mathbb{K}_D(\pm q) + \frac{1}{4} \frac{\rho \sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D), \\ r_{[D, q]} &= \mathfrak{L}_{[D, q]} + \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\sigma - \rho} \mathcal{H}^1(\text{bd } D), \quad \kappa_{[D, q]} = \frac{\rho + \sigma}{\rho} r_{[D, q]}.\end{aligned}$$

Dla każdego  $c \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $\mu \geq 0$  zdefiniujmy

$$\mathbf{P}[D, q, c] = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \|b - c\| \geq \kappa_{[D, q]} + \frac{2\sigma}{\rho} \|a - c\| \right\},$$

$$\Delta[q, c, \mu] = [c - \mu q, c + \mu q].$$

**Definicja 7.2.** Założmy, że  $(a, b) \in \mathbf{P}[D, q, c]$ .

(a) Powiemy, że  $\varphi \in \Phi(a, b)$  jest strategią skutecznej obrony odcinka  $\Delta[q, c, \mu]$  w grze  $\mathcal{G}[D, q, c, \mu, a, b]$ , jeżeli dla każdej trajektorii  $y \in Y(b)$  z warunku

$$y(t) \in \Delta[q, c, \mu]$$

wynika istnienie takiego  $s \in [0, t)$ , że

$$y(s) \in \varphi(y)(s) + \text{int } D.$$

Zbiór wszystkich strategii skutecznej obrony odcinka  $\Delta[q, c, \mu]$  w grze  $\mathcal{G}[D, q, c, \mu, a, b]$  oznaczmy przez

$$\Phi[D, q, c, \mu, a, b].$$

(b) Powiemy, że  $\psi \in \Psi(a, b)$  jest strategią skutecznego ataku odcinka  $\Delta[q, c, \mu]$  w grze  $\mathcal{G}[D, q, c, \mu, a, b]$ , jeżeli dla każdej trajektorii  $x \in X(a)$  mamy

$$\psi(x)(t) \notin x(t) + \text{int } D, \quad t \geq 0,$$

i istnieje takie  $t^* \geq 0$ , że

$$\psi(x)(t^*) \in \Delta[q, c, \mu].$$

(c) Ceną gry  $\mathcal{G}[D, q, c]$  nazwiemy liczbę

$$\text{val } \mathcal{G}[D, q, c] = \sup \left\{ \mu \geq 0 : \bigwedge_{(a,b) \in \mathbf{P}[D,q,c]} \Phi[D, q, c, \mu, a, b] \neq \emptyset \right\}.$$

**Twierdzenie 7.1.** Jeżeli  $D \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem przystosowanym do obrony odcinków o kierunku  $\pm q$ , to dla każdego  $c \in \mathbb{R}^2$  ma miejsce równość

$$\text{val } \mathcal{G}[D, q, c] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - \rho^2} \mathbb{k}_D(\pm q) + \frac{1}{2} \frac{\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D).$$

**Dowód.** Istnieją takie punkty  $z^-, z^+ \in \text{bd } D$ , że:

$$\begin{aligned} z^- &\in D(-q), \quad z^+ \in D(q), \quad z^- = -z^+, \quad \frac{z^+}{\|z^+\|} = q, \\ \mathcal{H}^1([z^-, z^+]_D) &= \mathcal{H}^1([z^+, z^-]_D) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\text{bd } D). \end{aligned}$$

Przyjmijmy

$$q = \omega(\beta), \quad \ell = \frac{1}{2} \mathbb{k}_D(\pm q)$$

i dla każdego  $\tau \in [-\ell, \ell]$  zdefiniujmy

$$\mathbf{M}(\tau) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \tau q + \lambda Lq \in D\},$$

$$f(\tau) = \max \mathbf{M}(\tau) \quad \text{oraz} \quad g(\tau) = \min \mathbf{M}(\tau).$$

Mamy (patrz lemat 7.1)

$$(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[\ell] \tag{7.1}$$

i łatwo sprawdzić, że:

$$\mathfrak{L}(f, g) = \mathfrak{L}_{[D,q]}, \tag{7.2}$$

$$r(f, g) = r_{[D,q]}, \quad \kappa(f, g) = \kappa_{[D,q]}. \tag{7.3}$$

Poza tym, dla każdego  $c \in \mathbb{R}^2$  i każdego  $\mu \geq 0$ ,

$$\Delta[D, q, c] = c + \mathcal{O}_\beta([- \mu, \mu] \times \{0\}). \tag{7.4}$$

Ustalmy dowolne  $c \in \mathbb{R}^2$  i dowolną parę pozycji początkowych  $(a, b) \in \mathbf{P}[D, q, c]$ . Obierzmy teraz dowolne  $\mu \in (0, \mathfrak{L}_{[D,q]})$  i przyjmijmy

$$a^* = \mathcal{O}_{-\beta}(a - c) \quad \text{oraz} \quad b^* = \mathcal{O}_{-\beta}(b - c).$$

Ponieważ obrót  $\mathcal{O}_{-\beta}$  jest izometrią, to korzystając z równości (7.3) otrzymamy (patrz definicja 4.5) relację  $(a^*, b^*) \in \mathbf{P}[f, g]$ . Następnie, korzystając z równości (7.2) i twierdzenia 5.1, stwierdzamy istnienie strategii  $\varphi^* \in \Phi(a^*, b^*)$  skutecznej obrony odcinka

$$[-\mu, \mu] \times \{0\}.$$

Dla każdego  $y \in Y(b)$  i każdego  $t \geq 0$  zdefiniujmy

$$\varphi(y)(t) = c + (\mathcal{O}_\beta \circ \varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta})(y(t) - c).$$

Ponieważ

$$\mathcal{O}_{-\beta}(y(0) - c) = \mathcal{O}_{-\beta}(b - c) = b^*$$

i

$$\text{Lip } \mathcal{O}_{-\beta} \circ (y - c) \leq \text{Lip } (y - c) \leq \sigma,$$

to

$$\mathcal{O}_{-\beta} \circ (y - c) \in Y(b^*).$$

Mamy zatem

$$\varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta} \circ (y - c) \in X(a^*),$$

a z analogicznych powodów jak wyżej  $\varphi(y)(0) = a$  oraz

$$\text{Lip } \varphi(y) = \text{Lip } (c + \mathcal{O}_{\beta} \circ \varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta} \circ (y - c)) \leq \rho.$$

Dowodzi to relacji  $\varphi \in \Phi(a, b)$ , bo  $\varphi : Y(b) \rightarrow X(a)$  jest odwzorowaniem nieanty-cypującym.

Przypuśćmy, że dla pewnego  $y \in Y(b)$  i pewnego  $t \geq 0$  ma miejsce relacja

$$\varphi(y)(t) \in \Delta[q, c, \mu].$$

Korzystając ze wzoru (7.4) otrzymamy

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\beta} \circ \varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta})(y(t) - c) &\in \Delta[q, c, \mu] - c, \\ (\varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta})(y(t) - c) &\in \mathcal{O}_{-\beta}(\Delta[q, c, \mu] - c) = [-\mu, \mu] \times \{0\}. \end{aligned}$$

Mamy wtedy  $t > 0$  i istnieje takie  $s \in (0, t)$ , że (patrz lemat 7.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{-\beta}(y(s) - c) &\in (\varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta})(y(s) - c) + \text{int } \mathbf{C}(f, g), \\ y(s) &\in c + (\mathcal{O}_{\beta} \circ \varphi^* \circ \mathcal{O}_{-\beta})(y(s) - c) + \mathcal{O}_{\beta}(\text{int } \mathbf{C}(f, g)) \\ &= \varphi(y)(s) + \mathcal{O}_{\beta}(\text{int } \mathbf{C}(f, g)) = \varphi(y)(s) + \text{int } D. \end{aligned}$$

Zatem  $\varphi$  jest strategią skutecznej obrony odcinka  $\Delta[q, c, \mu]$ . Stąd, wobec dowolności  $\mu \in (0, \mathfrak{L}_{[D, q]})$ , otrzymujemy nierówność

$$\text{val } \mathfrak{G}[D, q, c] \geq 2\mathfrak{L}_{[D, q]}.$$

Rozumując podobnie i korzystając z twierdzenia 6.1 można dowieść nierówności

$$\text{val } \mathfrak{G}[D, q, c] \leq 2\mathfrak{L}_{[D, q]}.$$

**Przykład 7.4.** Przyjmijmy (patrz przykład 7.3)

$$\begin{aligned} a_0 &= \begin{bmatrix} -\frac{27}{5} \\ -\frac{39}{5} \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} \frac{27}{5} \\ \frac{39}{5} \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}, \\ q &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz

$$D = \text{conv } \{a_0, a_1, a_2, a_3\}.$$

Mamy

$$q = \omega(\beta),$$

gdzie

$$\beta = \pi + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 5.355890,$$

$$\begin{aligned}\chi_D(q) &= \langle q, a_1 \rangle = 3, \quad D(q) = [a_0, a_1], \\ \chi_D(-q) &= \langle q, a_3 \rangle = -3, \quad D(-q) = [a_2, a_3], \\ \mathbb{k}_D(\pm q) &= 6, \quad \ell = 3.\end{aligned}$$

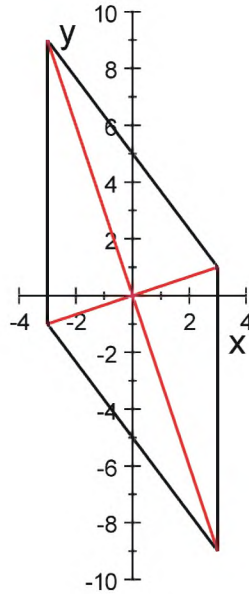
Łatwo sprawdzić, że punkty

$$z^+ = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{bmatrix}, \quad z^- = \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

spełniają założenia lematu **7.1**. Dla każdego  $\tau \in [-3, 3]$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}f(\tau) &= \max\{\mu \in \mathbb{R} : \tau q + \mu Lq \in D\} = 5 - \frac{4}{3}\tau, \\ g(\tau) &= \min\{\mu \in \mathbb{R} : \tau q + \mu Lq \in D\} = -5 - \frac{4}{3}\tau\end{aligned}$$

i  $(f, g) \in \mathbf{W}_{\text{OBR}}[3]$ .



**Rys. 7.2.** Strefa rażenia  $\mathbf{C}(f, g)$ .

Przyjmując

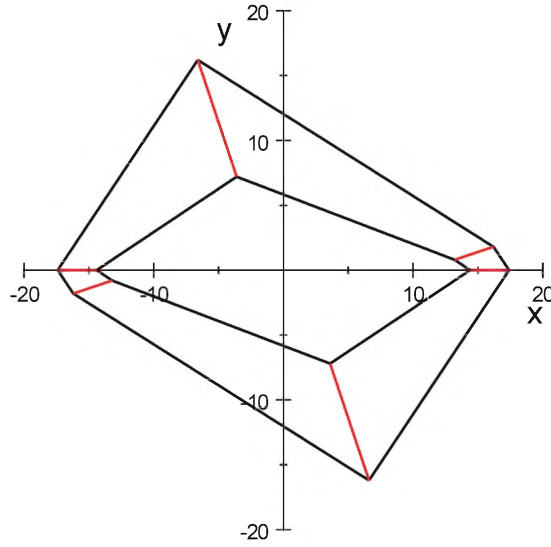
$$\rho = 1, \quad \sigma = \frac{3}{2}, \quad \pi = \{-3, 3\}$$

i korzystając ze wzorów podanych w przykładzie **2.2** wyznaczamy liczby

$$\ell^{\mathbf{O}} = \frac{72}{5}, \quad \ell^{\mathbf{N}} = \frac{87}{5}$$

i funkcje

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f)(\tau) &= \min \left\{ \frac{2}{3}\tau + \frac{48}{5}, \frac{204}{35} - \frac{8}{21}\tau, \frac{48}{5} - \frac{2}{3}\tau \right\}, \\
(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f)(\tau) &= \min \left\{ \frac{3}{2}\tau + \frac{261}{10}, \frac{1143}{95} - \frac{12}{19}\tau, \frac{261}{10} - \frac{3}{2}\tau \right\}, \\
(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g)(\tau) &= \max \left\{ -\frac{2}{3}\tau - \frac{48}{5}, -\frac{8}{21}\tau - \frac{204}{35}, \frac{2}{3}\tau - \frac{48}{5} \right\}, \\
(\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g)(\tau) &= \max \left\{ -\frac{3}{2}\tau - \frac{261}{10}, -\frac{12}{19}\tau - \frac{1143}{95}, \frac{3}{2}\tau - \frac{261}{10} \right\}.
\end{aligned}$$



**Rys. 7.3.** Układ obronny  $\mathbf{C} \left( (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{O}} g), (\mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} f, \mathcal{S}_\pi^{\mathbf{N}} g), F_{(f,g,\pi)} \right)$ .

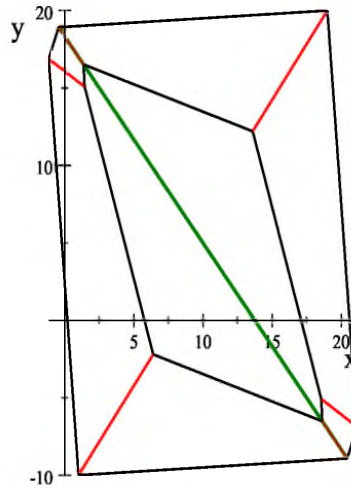
Zgodnie z lematem 3.2, wnioskiem 6.1 i twierdzeniem 7.1, dla każdego  $c \in \mathbb{R}^2$ , otrzymujemy

$$\text{val } \mathcal{G}[D, q, c] = 2\ell^{\mathbf{N}} = \frac{174}{5} = 34, 8.$$

W szczególności, dla  $c = (10, 5)$  oraz  $\mu = \frac{87}{5}$  mamy

$$\Delta[q, c, \mu] = \left[ \left( -\frac{11}{25}, \frac{473}{25} \right), \left( \frac{511}{25}, -\frac{223}{25} \right) \right].$$





**Rys. 7.4.** Obrona odcinka  $\left[ \left( -\frac{11}{25}, \frac{473}{25} \right), \left( \frac{511}{25}, -\frac{223}{25} \right) \right]$ .

## Literatura

1. S. D. Bopardikar, F. Bullo, J. Hespanha, Sensing limitations in the Lion and Man problem, Proc., American Control Conference, New York, 2007;  
<http://motion.mee.ucsb.edu/pdf/2005/-bbh.pdf>.
2. P. Borówko, W. Rzymowski, Existence of the value of fixed duration dynamical game, Dissertat. Math. **CCLI**, 1986.
3. P. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre, Pursuit differential games with state constraints, SIAM J. Control Optim., **39**, No. 5, 2001, 1615-1632.
4. L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Inc., 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida, 1992.
5. H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
6. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
7. R. Isaacs, *Differential Games*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1999.
8. V. Isler, S. Kannan, S. Khanna, Locating and Capturing an Evader in a Polygonal Environment, Algorithmic Foundations of Robotics (Utrecht 2004); M. Erdmann et. al. (ed), Springer, Berlin, 2005, 251-266.
9. L. W. Kantorowicz, G. P. Akiłow, *Analiza funkcjonalna* (ros.), Nauka, Moskwa, 1984.
10. P. Kawęcki, B. Kraska, K. Majcherek, M. Zoła, Guarding a line segment, Systems & Control Letters, Vol. **58**, No. 7, (July 2009), pp. 540-545.

11. N. N. Krasowskii, A. I. Subbotin, *Pozycyjne gry różniczkowe*, (ros.) Nauka, Moskwa 1974.
12. B. Kraska, W. Rzymowski, Guarding a Line Segment, *Journal of Convex Analysis* **18** (2011), No. 3, 645-671.
13. R. Murietta-Cid, A. Sarmiento, S. Battacharya, S. Hutchinson, Maintaining Visibility of a Moving Target at a Fixed Distance, *Proc. IEEE Int'l. Conf. on Robotics and Automation*, New Orleans, 2004, 479-484.
14. Ngoc-Minh Lê, On determining optimal strategies in pursuit games in the plane, *Theor. Comput. Sci.*, **197** (1998), 203-234.
15. Cz. Ryll-Nardzewski, A theory of pursuit and evasion, *Ann. Math. Stud.*, **3** (1957), 393-405.
16. J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, Oxford, 1987.
17. W. Rzymowski, A counterexample in differential games with dynamical systems, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **XXIX** (1981), 417-418.
18. W. Rzymowski, A. Stachura, Curves bounding maximal area, *Nonlinear Anal., Theory Methods and Appl.* **20** (1993), 1369-1372.
19. G. E. Szyłow, *Analiza matematyczna. Drugi specjalny kurs* (ros.), Wydawnictwo Uniwersytetu Moskiewskiego, Moskwa, 1984.
20. F. P. Wasiliew, *Numeryczne metody rozwiązywania zadań na ekstremum* (ros.), Nauka, Moskwa, 1988.